

Contrôle commun n°3 - Spécialité mathématiques – 13 Février 2023

Eléments de réponse

(ex1-9 + ex2-7 + ex3-9 + ex4-15 / 40 points)

Exercice 1 (9 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des six questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Une expression de la dérivée de la fonction $x \mapsto (2x-1)\sqrt{x}$ est la fonction :

a. $x \mapsto 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$	b. $x \mapsto 2 - \sqrt{x}$	c. $x \mapsto 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$	d. $x \mapsto 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$
--	-----------------------------	--	--

Réponse c) La fonction f , qui à $x \in]0; +\infty[$, associe $f(x) = (2x-1)\sqrt{x}$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit des deux fonctions $u : x \mapsto u(x) = 2x-1$ et $w : x \mapsto w(x) = \sqrt{x}$ définies et dérivables sur $]0; +\infty[$.

Pour tout x dans l'intervalle $]0; +\infty[$,

- $u(x) = 2x-1$ et $u'(x) = 2$
- $w(x) = \sqrt{x}$ et $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ainsi, en appliquant, pour tout x dans l'intervalle $]0; +\infty[$,

$f'(x) = (u \times w)'(x) = u'(x) \times w(x) + u(x) \times w'(x)$, on obtient,

$$f'(x) = 2 \times \sqrt{x} + (2x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 2,1$ et pour tout entier naturel non nul n , $v_{n+1} = 5v_n^2 + v_n - 1$.

On considère la fonction Python suite() ci-contre. Que renvoie-t-elle ?

```
1 def suite():
2     k=0
3     v=2.1
4     while v<10000:
5         k=k+1
6         v=5*v**2+v-1
7     return k
```

a. 2,1	b. 3	c. 2	d. 23,15
--------	------	------	----------

Réponse b)

Script	Console
<pre> 1 def suite(): 2 k=0 3 v=2.1 4 while v<10000: 5 k=k+1 6 v=5*v**2+v-1 7 return k </pre>	<pre> Python 3.10.2 (main, Sep 15 2022 23:28:12) Type "help", "copyright", "credits" or "license" >>> # script executed >>> suite() 3 >>> </pre>

3) Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par $t_n = \frac{n-3}{2n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression $t_{n+1} - t_n$ est égale à :

a. $\frac{2n+1}{(2n+1)(2n+3)}$	b. $\frac{7}{(2n+1)(2n+3)}$	c. $-\frac{5}{2}$	d. $\frac{-9n-11}{(2n+1)(2n+3)}$
--------------------------------	-----------------------------	-------------------	----------------------------------

Réponse b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la différence $t_{n+1} - t_n$:

$$t_{n+1} - t_n = \frac{(n+1)-3}{2(n+1)+1} - \frac{n-3}{2n+1} = \frac{n-2}{2n+3} - \frac{n-3}{2n+1} = \frac{(n-2)(2n+1) - (n-3)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2n^2 + n - 4n - 2 - 2n^2 - 3n + 6n + 9}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{7}{(2n+3)(2n+1)}$$

4) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n , $v_n = 0,9^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de l'expression $v_{n+1} - v_n$:

a. est positif	b. peut être négatif comme positif	c. dépend de n	d. négatif
----------------	------------------------------------	------------------	------------

Réponse d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la différence $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = 0,9^{n+1} - 0,9^n = 0,9^n(0,9 - 1) = -0,1 \times 0,9^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,9^n > 0$, le signe de la différence est donc négatif.

5) Soit (v_n) la suite définie par $v_0=2$ et pour tout entier naturel non nul n , $v_{n+1}=5v_n-1$.

Quelle fonction Python permet de renvoyer les 5 premiers termes de la suite (v_n) ?

a. <pre> 1 def suite(): 2 v=2 3 L=[v] 4 for i in range(1,4): 5 v=5*v-1 6 L.append(v) 7 return L </pre>	b. <pre> 1 def suite(n): 2 v=2 3 L=[v] 4 for i in range(1,n+1): 5 v=5*v-1 6 L.append(v) 7 return L </pre>	c. <pre> 1 def suite(n): 2 v=2 3 L=[v] 4 for i in range(1,n+1): 5 v=5*v-1 6 L.append(v) 7 return L </pre>	d. <pre> 1 def suite(): 2 v=2 3 L=[v] 4 for i in range(5): 5 v=5*v-1 6 L.append(v) 7 return L </pre>
En appelant suite()	En appelant suite(4)	En appelant suite(5)	En appelant suite()

Réponse b)

Script

```

1 def suite(n):
2     v=2
3     L=[v]
4     for i in range(1,n+1):
5         v=5*v-1
6         L.append(v)
7     return L

```

Console

```

Python 3.10.2 (main, Sep 15 2022 23:28:
Type "help", "copyright", "credits" or
>>> # script executed
>>> suite(4)
[2, 9, 44, 219, 1094]
>>>

```

6) On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	- 3	2	66,1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		- 0 -	0	+ 0 -	

En utilisant les informations données par le tableau de signes de f' , on peut affirmer que :

a. f admet un minimum en 2 sur $[-1; 4]$	b. f est décroissante sur $]-\infty; 5]$	c. f admet un extremum en -3 sur $[-4; 1]$	d. f est croissante sur $[2; 66,5]$
--	--	--	---------------------------------------

Réponse a) La fonction f admet un minimum en 2 sur $[-1; 4]$.

Exercice 2 (7 points) (7 points : 1,5+1+1,5+1,5+1,5)

Une municipalité propose une carte annuelle « pass culture » à ses administrés. Il s'agit d'une carte qui donne accès aux spectacles programmés dans la commune avec un tarif préférentiel.

Cette carte est proposée avec deux options : l'option « cinéma » et l'option « tout spectacle ». Un administré n'a droit qu'à une seule carte et celle-ci est individualisée par un numéro. Selon un critère social, une subvention de la municipalité peut être accordée lors de l'achat de cette carte.

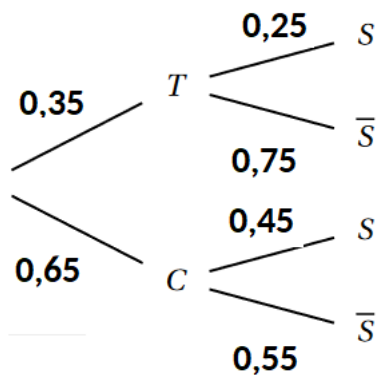
Pour cette année, le service municipal à la culture a donné le bilan suivant :

Les cartes avec l'option « tout spectacle » représentent 35 % des cartes « pass culture » et 25 % de celles-ci ont été l'objet de la subvention municipale.

Pour les cartes avec l'option « cinéma », 45 % ont été l'objet de la subvention. Lors d'une enquête, un numéro de carte est tiré au hasard. On note :

- T : l'évènement « le numéro tiré est celui d'une carte avec l'option tout spectacle » ;
- C : l'évènement « le numéro tiré est celui d'une carte avec l'option cinéma » ;
- S : l'évènement « le numéro tiré est celui d'une carte ayant été l'objet de la subvention ».

1) Compléter l'arbre de probabilité représenté ci-dessous. (1,5)



2) Définir par une phrase l'évènement $C \cap \bar{S}$, puis calculer $P(C \cap \bar{S})$. (1)

L'évènement $C \cap \bar{S}$ est « le numéro tiré est celui d'une carte avec l'option cinéma et n'ayant pas été l'objet de la subvention ».

Calculons $P(C \cap \bar{S})$: $P(C \cap \bar{S}) = P(C) \times P_C(\bar{S}) = 0,65 \times 0,55 = 0,3575$

La probabilité que le numéro tiré est celui d'une carte avec l'option cinéma et n'ayant pas été l'objet de la subvention est de 0,3575.

3) Montrer que la probabilité de l'évènement $\bar{S}$ est égale à 0,62. (1,5)

Calculons $P(\bar{S})$. Les événements T et C forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(\bar{S}) = P(\bar{S} \cap T) + P(\bar{S} \cap C) = P(C) \times P_C(\bar{S}) + P(T) \times P_T(\bar{S}) = 0,3575 + 0,35 \times 0,75 = 0,62$$

La probabilité que le numéro tiré est celui d'une carte n'ayant pas été l'objet d'une subvention est bien égale à 0,62.

4) L'expérience menée par la mairie sera reconduite l'année suivante si la probabilité que la carte soit avec option cinéma sachant qu'elle n'a pas fait l'objet d'une subvention dépasse 0,52. Cette expérience sera-t-elle reconduite l'an prochain ? (1,5)

Commençons par calculer la probabilité la probabilité que la carte soit avec option cinéma sachant qu'elle n'a pas fait l'objet d'une subvention, à savoir $P_{\bar{S}}(C)$:

$$P_{\bar{S}}(C) = \frac{P(\bar{S} \cap C)}{P(\bar{S})} = \frac{0,3575}{0,62} \approx 0,5766.$$

La probabilité la probabilité que la carte soit avec option cinéma sachant qu'elle n'a pas fait l'objet d'une subvention est égale à 0,577 (au millième près), étant supérieure à 0,52 on peut affirmer que cette expérience sera reconduite par la mairie l'an prochain.

5) Les évènements C et $\bar{S}$ sont-ils indépendants ? Justifier la réponse. (1,5)

D'une part $P_{\bar{S}}(C) \approx 0,577$; d'autre part $P(C) = 0,65$; ainsi $P_{\bar{S}}(C) \neq P(C)$.

Les deux événements C et $\bar{S}$ ne sont pas indépendants.

(Autre méthode : $P(\bar{S} \cap C) = 0,3575$ et $P(C) \times P(\bar{S}) = 0,65 \times 0,62 = 0,403 \neq$ donc

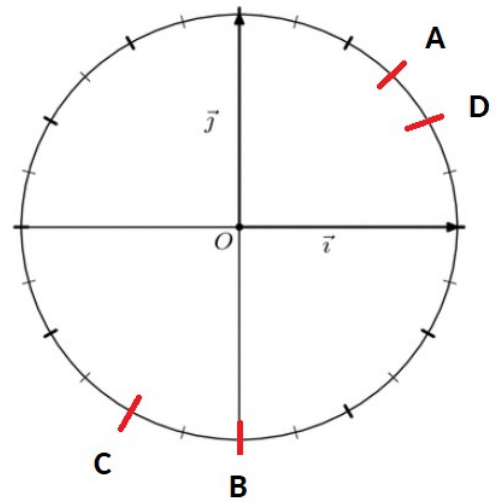
$P(C \cap \bar{S}) \neq P(C) \times P(\bar{S})$ donc C et $\bar{S}$ ne sont pas indépendants.)

Exercice 3 (9 points)

1) (2) a) Placer sur le cercle trigonométrique, ci-contre, les points A, B, C et D repérant respectivement les nombres suivants :

$$\frac{-7\pi}{4}; \quad \frac{15\pi}{2}; \quad \frac{-8\pi}{3}; \quad \frac{13\pi}{6};$$

b) (2) En déduire la valeur de chacun des nombres ci-dessous.



$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; & \cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) &= 0; \\ \sin\left(\frac{-8\pi}{3}\right) &= -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

2) a) (1,5) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour tout x dans $[-\pi; \pi]$; $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement $x \in \{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\}$

Les solutions de l'équation sont $\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\}$.

b) (1,5) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ de l'équation $\sin(x) = \sin\frac{\pi}{3}$.

Pour tout x dans $[0; 2\pi]$; $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si et seulement $x \in \{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\}$

Les solutions de l'équation sont $\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\}$.

3) (1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$. Déterminer la parité de f .

Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$f(-x) = \cos(-x)\sin^2(-x)$, mais $\sin(-x) = -\sin(x)$ car la fonction sinus est impaire et

$\cos(-x) = \cos(x)$ car la fonction cosinus est paire.

Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = \cos(-x)\sin^2(-x) = \cos(x)(-\sin(x))^2 = \cos(x)\sin^2(x) = f(x)$

La fonction f est donc paire sur $\mathbb{R}$.

4) (1) Soit x un nombre de l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ tel que $\cos(x) = \frac{1}{7}$.

Déterminer la valeur exacte de $\sin(x)$.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, dans cette question $\cos(x) = \frac{1}{7}$ donc

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{49}} \quad \text{OU} \quad \sin(x) = -\sqrt{1 - \cos^2(x)} = -\sqrt{1 - \frac{1}{49}} = -\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{49}}$$

Mais $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ donc $\sin(x) \leq 0$. Finalement, $\sin(x) = -\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{49}}$.

Exercice 4 (15 points) 15 points : (2+(2+1)+1,5+(1+1,5+1,5+1+1)+(1+1+0,5)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2+9} + 1$.

Soit C_f sa courbe représentative.

1) (2) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2(x^2-9)}{(x^2+9)^2}$.

La fonction f est somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, avec un dénominateur ne s'annulant pas, et une fonction constante, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

(On peut aussi dire que f est la somme d'une fonction rationnelle et d'une fonction constante, donc est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{u(x)}{w(x)} + 1$, avec

- $u(x) = 2x$ et $u'(x) = 2$
- $w(x) = x^2 + 9$ et $w'(x) = 2x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{u'(x)w(x) - u(x)w'(x)}{w^2(x)} + 0$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2(x^2+9) - 2x \times 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{2x^2+18-4x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{-2x^2+18}{(x^2+9)^2} = -\frac{2(x^2-9)}{(x^2+9)^2}$$

Finalement, on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2(x^2-9)}{(x^2+9)^2}$.

2) (2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2(x^2-9)}{(x^2+9)^2} = \frac{-2(x-3)(x+3)}{(x^2+9)^2}$

Le dénominateur est strictement positif, le signe de $f'(x)$ est du même signe que le signe du numérateur. Le numérateur est un polynôme du second degré écrit sous sa forme factorisée, de racines -3 et 3 , avec un coefficient dominant négatif. On obtient le tableau de signe suivant, duquel on déduit les variations de f

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+	0	-
Variations de f					

Avec $f(-3) = \frac{2}{3}$ et $f(3) = \frac{4}{3}$.

b) (1) En déduire les extrema éventuels de la fonction f sur l'intervalle $[-4 ; -2]$; puis sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

- D'après le tableau de variations, l'intervalle $[-4 ; -2]$, f' s'annule en changeant de signe en -3 , la fonction admet donc $f(-3) = \frac{2}{3}$ comme extremum local sur l'intervalle $[-4 ; -2]$, extremum atteint en -3 . De plus, comme f est décroissante sur $[-4 ; -3]$ puis croissante sur $[-3 ; -2]$ cet extremum est un minimum sur $[-4 ; -2]$.
- D'après le tableau de variations, l'intervalle $[1 ; 4]$, f' s'annule en changeant de signe en 3 , la fonction admet donc $f(3) = \frac{4}{3}$ comme extremum local sur l'intervalle $[1 ; 4]$, extremum atteint en 3 . De plus, comme f est croissante sur $[1 ; 3]$ puis décroissante sur $[3 ; 4]$ cet extremum est un maximum sur $[1 ; 4]$.

3) (1,5) Montrer que l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse -1 , est donnée par $y = 0,16x + 0,96$.

L'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse -1 , est donnée par :

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1).$$

On a $f'(-2) = -\frac{2(1-9)}{(1+9)^2} = \frac{16}{100} = 0,16$ et $f(-1) = \frac{-2}{1+9} + 1 = 0,8$; on obtient donc,

$$y = 0,16(x+1) - 0,8 = 0,16x + 0,16 - 0,8 = 0,16x + 0,96.$$

L'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse -1, est donnée par $y = 0,16x + 0,96$.

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 - x^2 - 14x - 9$.

a) (1) Justifier que g dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 4 \times 3x^2 - 2x - 14 = 12x^2 - 2x - 14$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 12x^2 - 2x - 14$.

b) (1,5) Etudier le signe de $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction g' est un polynôme du second degré, pour étudier son signe, commençons par déterminer ses racines éventuelles :

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 12 \times (-14) = 676 > 0$; le polynôme possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{676}}{24} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{676}}{24} = \frac{7}{6}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	0	+
	signe de a		signe de -a	signe de a

c) (1,5) En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	0	+
Variations de				

Avec

- $g(-1) = 4 \times (-1)^3 - (-1)^2 - 14 \times (-1) - 9 = 0$

- et $g\left(\frac{7}{6}\right) = 4 \times \left(\frac{7}{6}\right)^3 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 - 14 \times \frac{7}{6} - 9 = -\frac{2197}{108}$

d) (1) Calculer $g(-1)$ (et $g(2,25)$)

- $g(-1) = 4 \times (-1)^3 - (-1)^2 - 14 \times (-1) - 9 = 0$
- et $g(2,25) = 4 \times (2,25)^3 - (2,25)^2 - 14 \times 2,25 - 9 = 0$

e) (1) A l'aide des questions précédentes, montrer que :

- $g(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty; 2,25]$;
- $g(x) \geq 0$ pour $x \in [2,25; +\infty[$

Rajoutons la donnée $g(2,25)=0$ de la question d) dans le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	-1	$\frac{7}{6}$	$2,25$
	$+\infty$			
Variations de g				
		0	$-\frac{2197}{108}$	0

Nous en déduisons que

- $g(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty; 2,25]$;
- $g(x) \geq 0$ pour $x \in [2,25; +\infty[$

5) (1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (0,16x + 0,96) = -\frac{g(x)}{25(x^2+9)}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - (0,16x + 0,96) = \frac{2x}{x^2+9} + 1 - (0,16x + 0,96)$$

$$f(x) - (0,16x + 0,96) = \frac{2x}{x^2+9} - 0,16x + 0,04$$

$$f(x) - (0,16x + 0,96) = \frac{2x + (-0,16x + 0,04) \times (x^2+9)}{x^2+9}$$

$$f(x) - (0,16x + 0,96) = \frac{2x + (-0,16x + 0,04) \times (x^2+9)}{x^2+9}$$

$$f(x) - (0,16x + 0,96) = \frac{2x + (-0,16x + 0,04) \times (x^2 + 9)}{x^2 + 9}$$

$$f(x) - (0,16x + 0,96) = \frac{-0,16x^3 + 0,04x^2 + 0,56x + 0,36}{x^2 + 9}$$

$$f(x) - (0,16x + 0,96) = \frac{-25(0,16x^3 - 0,04x^2 - 0,56x - 0,36)}{25(x^2 + 9)}$$

$$f(x) - (0,16x + 0,96) = \frac{-(4x^3 - x^2 - 14x - 9)}{25(x^2 + 9)}$$

$$\text{Finalement, pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) - (0,16x + 0,96) = -\frac{g(x)}{25(x^2 + 9)}$$

(1) b) En déduire la position de la courbe C_f de la fonction f par rapport à la tangente T .

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) - (0,16x + 0,96) = -\frac{g(x)}{25(x^2 + 9)}$; le dénominateur étant strictement positif, le signe

de cette différence est du signe du numérateur $-g(x)$.

En utilisant les résultats de la question 5)e), on obtient :

Nous en déduisons que

- $g(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty; 2,25]$;
- $g(x) \geq 0$ pour $x \in [2,25; +\infty[$
- $f(x) - (0,16x + 0,96) \geq 0$ pour $x \in]-\infty; 2,25]$; la tangente T est en dessous de la courbe C_f
- $f(x) - (0,16x + 0,96) \leq 0$ pour $x \in [2,25; +\infty[$; la tangente T est au dessus de la courbe C_f

(0,5) c) On a tracé ci-dessous la courbe C_f , représentée dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Tracer la droite T dans ce repère.

On utilisera pour la tracé :

- la droite T passe par le point de coordonnées $(-1; 0,8)$ et sa pente est égale à **0,16**
- ou la droite T passe par les points de coordonnées $(-1; 0,8)$ et $(2,25; 1,32)$

