Contrôle commun n°3

1re spécialité mathématiques – 11 Février 2023

Durée : 3 heures ***/ 40 points***

La calculatrice est autorisée. Le sujet se compose de 4 exercices.
Une **annexe en page 5** sera à rendre avec votre copie.

Exercice 1 *(9 points)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des six questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augmente de 3% tous les mois.
La fonction Python seuil () qui renvoie le nombre de mois à attendre avant que sa valeur dépasse 200 € est :

a.
```python
def seuil():
    m=0
    v=57
    while v > 200:
        m=m+1
        v=v*1.03
    return m
```

b.
```python
def seuil():
    m=0
    v=57
    if v < 200:
        m=m+1
    else:
        v=v*1.03
    return m
```

c.
```python
def seuil():
    m=0
    v=57
    while v < 200:
        m=m+1
        v=v*1.03
    return m
```

d.
```python
def seuil():
    v=57
    for i in range(200):
        v=v*1.03
    return v
```

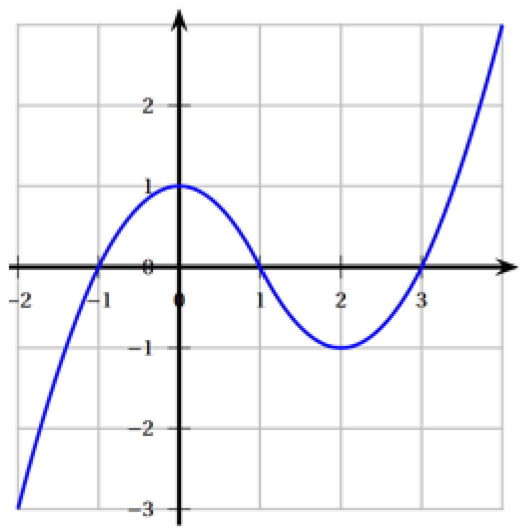
2) Une expression de la dérivée de la fonction $x \mapsto (x+1)\sqrt{x}$ est la fonction :

a. $x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$	**b.** $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$	**c.** $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	**d.** $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x}}+1$

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{4n-1}{n+1}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression $u_{n+1} - u_n$ est égale à :

a. $\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$	**b.** $\frac{4n+5}{(n+1)(n+2)}$	**c.** $\frac{2}{3}$	**d.** $\frac{5}{(n+1)(n+2)}$

4) On donne ci-dessous la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', on peut dire que :

a. f est décroissante sur $[0;2]$	**b.** f est décroissante sur $[-1;0]$	**c.** f admet un maximum en 1 sur $[0;2]$	**d.** f admet un maximum en 3 sur $[2;4]$

5) Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = {v_n}^2 - 3v_n + 4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de l'expression $v_{n+1} - v_n$:

a. est négatif	**b.** est positif	**c.** peut être négatif comme positif	**d.** ne peut pas être déterminé

6) Soit (v_n) la suite définie par :

$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = {v_n}^2 - 3v_n + 4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On considère la fonction Python ci-contre :

```
def etude(n):
    v = 3
    L = [v]
    for i in range(1,n+1):
        v = v**2-3*v+4
        L.append(v)
    return L
```

Que renvoie l'instruction etude(3) ?

a. Le quatrième terme de la suite (v_n)	**b.** Le troisième terme de la suite (v_n)	**c.** [3, 4, 8, 44] les quatre premiers termes de la suite (v_n)	**d.** [4, 8, 44] les termes d'indice 1, 2 et 3 de la suite (v_n)

Exercice 2 *(7 points)*

Au cours de l'année scolaire précédente, le lycée Sophie GERMAIN a testé une nouvelle version de l'espace numérique de travail (ENT). Une enquête a été réalisée auprès des 3 000 élèves du lycée, afin de savoir s'ils utilisent régulièrement l'ENT pour leurs études.

On a obtenu les résultats suivants :

- 25 % des élèves du lycée sont inscrits en « post-bac » et parmi ces élèves, 50 % d'entre eux déclarent utiliser quotidiennement l'ENT.
- 10 % des élèves inscrits en « pré-bac » dans ce lycée déclarent utiliser quotidiennement l'ENT.

On interroge au hasard un élève du lycée et on définit les évènements suivants

- A : « L'élève est inscrit en « post-bac ». »
- I : « L'élève utilise quotidiennement l'ENT. »

1) Compléter l'arbre pondéré traduisant la situation, donné en annexe **page 5.**

2) Calculer la probabilité que l'élève est un étudiant « post-bac » et utilise quotidiennement l'ENT pour ses études.

3) Calculer la probabilité que l'élève utilise quotidiennement l'ENT pour ses études.

4) Cette nouvelle version de l'ENT sera jugée efficace si la probabilité que l'élève est un étudiant « post-bac » sachant qu'il utilise quotidiennement l'ENT pour ses études, est supérieure à 0,75.
Peut-on affirmer que cette nouvelle version de l'ENT est efficace ?

5) Les événements A et I sont-ils indépendants ?

Exercice 3 *(10 points)*

1) a) Placer sur le cercle trigonométrique, donné en **annexe page 5**, les points repérant les nombres suivants.

$$-\frac{5\pi}{4} \quad ; \quad \frac{11\pi}{6} \quad ; \quad -\frac{4\pi}{3} \quad ; \quad \frac{13\pi}{2}$$

b) En déduire la valeur de chacun des nombres ci-dessous.

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \qquad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) \qquad \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) \qquad \sin\left(\frac{13\pi}{2}\right)$$

2) Soit a un nombre de l'intervalle $\left[\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(a) = -\frac{1}{4}$.
Calculer $\cos(a)$.

3) a) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ de l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ de l'équation $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$.

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.
Déterminer la parité de f.

5) Soit x un réel quelconque, parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?
a. $\cos(x+\pi) = \cos(x)$ b. $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$
c. $\sin(x+\pi) = \sin(x)$ d. $\cos(x+\pi) = -\sin(x)$

Exercice 4 ***(14 points)***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$.
Soit C_f sa courbe représentative.

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{6x}{(x^2+2)^2}$.

2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
b) En déduire les extrema éventuels de la fonction f. Justifier.

3) Montrer que l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2, est donnée par $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$.

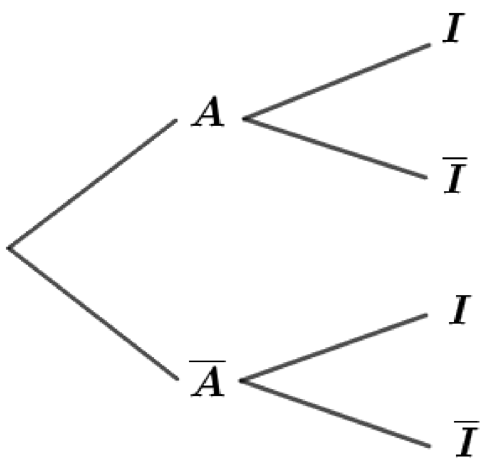
4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 4$.
a) Justifier que g dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
b) Etudier le signe de $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c) En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
d) Calculer $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.
e) A l'aide des questions précédentes, montrer que : $\begin{cases} g(x) \le 0 \text{ si } x \le -\frac{1}{2} \\ g(x) \ge 0 \text{ si } x \ge -\frac{1}{2} \end{cases}$

5) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{g(x)}{6(x^2+2)}$.
b) En déduire la position de la courbe C_f de la fonction f par rapport à la tangente T.
c) On donne en annexe page 5 la courbe C_f , représentée dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Tracer la droite T dans ce repère.

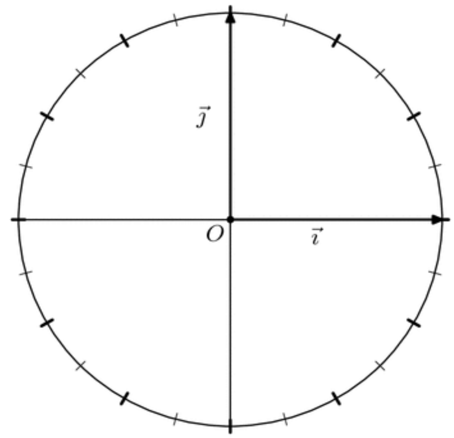
Nom : **Prénom :** **GROUPE n°**

<u>ANNEXE</u> *(à rendre avec la copie)*

<u>Exercice 2, question 1</u>



<u>Exercice 3, question 1</u>



<u>Exercice 4, question 5c</u>