

Contrôle commun n°3 – éléments de corrigé

1re spécialité mathématiques – 11 Février 202 (durée : 3 heures)

(ex1-9 + ex2-7 + ex3-10 + ex4-14/ 40 points)

Exercice 1 (9 points=1,5 points par question)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des six questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- 1) Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augmente de 3% tous les mois.

La fonction Python `seuil()` qui renvoie le nombre de mois à attendre avant que sa valeur dépasse 200 € est :

a. <pre>def seuil(): m=0 v=57 while v > 200: m=m+1 v=v*1.03 return m</pre>	b. <pre>def seuil(): m=0 v=57 if v < 200: m=m+1 else: v=v*1.03 return m</pre>	c. <pre>def seuil(): m=0 v=57 while v < 200: m=m+1 v=v*1.03 return m</pre>	d. <pre>def seuil(): v=57 for i in range(200): v=v*1.03 return v</pre>
---	--	---	--

Réponse c)

Script

```
1 def seuil():
2     m=0
3     v=57
4     while v<200:
5         m=m+1
6         v=v*1.03
7     return m
```

Console

```
Python 3.10.2 (main, Sep 15
Type "help", "copyright", '
>>> # script executed
>>> seuil()
43
>>>
```

2)

Une expression de la dérivée de la fonction $x \mapsto (x+1)\sqrt{x}$ est la fonction :

a. $x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$	b. $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	c. $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	d. $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x}} + 1$
--	---	---	---

Réponse b) La fonction f , qui à $x \in]0; +\infty[$, associe $f(x) = (x + 1)\sqrt{x}$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit des deux fonctions

$u: x \mapsto u(x) = x + 1$ et $w: x \mapsto w(x) = \sqrt{x}$ définies et dérivables sur $]0; +\infty[$.

Pour tout x dans l'intervalle $]0; +\infty[$,

- $u(x) = x + 1$ et $u'(x) = 1$
- $w(x) = \sqrt{x}$ et $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ainsi, en appliquant, pour tout x dans l'intervalle $]0; +\infty[$,

$f'(x) = (u \times w)'(x) = u'(x) \times w(x) + u(x) \times w'(x)$, on obtient,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3) Soit (u_n) la suite définie sur N par $u_n = \frac{4n-1}{n+1}$

Pour tout $n \in N$, l'expression $u_{n+1} - u_n$ est égale à :

a. $\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$	b. $\frac{4n+5}{(n+1)(n+2)}$	c. $\frac{2}{3}$	d. $\frac{5}{(n+1)(n+2)}$
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------	----------------------------------

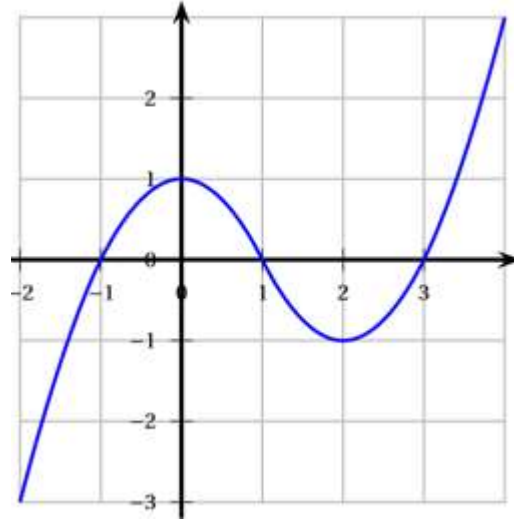
Réponse d) Pour tout $n \in N$, considérons la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4(n+1) - 1}{(n+1) + 1} - \frac{4n - 1}{n + 1} = \frac{4n + 3}{n + 2} - \frac{4n - 1}{n + 1} \\ &= \frac{(4n + 3) \times (n + 1) - (4n - 1) \times (n + 2)}{(n + 1)(n + 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4n^2 + 4n + 3n + 3 - 4n^2 - 8n + 2}{n + 1} \\ &= \frac{4n^2 + 4n + 3n + 3 - 4n^2 - 8n + n + 2}{n + 1} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n + 1)(n + 2)}$$

- 4) On donne ci-dessous la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f' , on peut dire que :

a. f est décroissante sur $[0; 2]$	b. f est décroissante sur $[-1; 0]$	c. f admet un maximum en 1 sur $[0; 2]$	d. f admet un maximum en 3 sur $[2; 4]$
---	--	--	--

Réponse c) Dressons le tableau de signes de la fonction f' sur l'intervalle $[-2; 4]$

x	-2	-1	1	3	4
Signe de $f'(x)$	-	0	+	0	+
Variation de f					

Soit x dans l'intervalle $[0; 2]$, on constate que la fonction f' est positive sur $[0; 1]$, s'annule en 1 puis est négative sur $[1; 2]$, la fonction f admet donc un maximum en 1 sur l'intervalle $[0; 2]$

- 5) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel non nul n , $v_{n+1} = v_n^2 - 3v_n + 4$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de l'expression $v_{n+1} - v_n$:

a. est négatif	b. est positif	c. peut être négatif comme positif	d. ne peut pas être déterminé
-----------------------	-----------------------	---	--------------------------------------

Réponse Pour tout $n \in N$, considérons la différence $v_{n+1} - v_n$:

b)
$$v_{n+1} - v_n = v_n^2 - 3v_n + 4 - v_n = v_n^2 - 4v_n + 4 - v_n = (v_n - 2)^2$$

Ainsi, pour tout $n \in N$, le signe de l'expression $v_{n+1} - v_n$ est positif.

6) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel non nul n ,
$$v_{n+1} = v_n^2 - 3v_n + 4.$$

On considère la fonction Python ci-contre :

Que renvoie l'instruction `etude(3)` ?

```
1 def etude(n):
2     v=3
3     L=[v]
4     for i in range(1,n+1):
5         v=v**2-3*v+4
6         L.append(v)
7     return L
```

a. Le quatrième terme de la suite (v_n)	b. Le troisième terme de la suite (v_n)	c. [3, 4, 8, 44] les quatre premiers termes de la suite (v_n)	d. [4, 8, 44] les termes d'indice 1, 2 et 3 de la suite (v_n)
--	--	---	---

Réponse c)

```
1 def etude(n):
2     v=3
3     L=[v]
4     for i in range(1,n+1):
5         v=v**2-3*v+4
6         L.append(v)
7     return L
8
```

```
Python 3.10.2 (main, Sep 1
Type "help", "copyright",
>>> # script executed
>>> # script executed
>>> etude(3)
[3, 4, 8, 44]
>>>
```

Exercice 2 (7 points : 1,5+1+1,5+1,5+1,5)

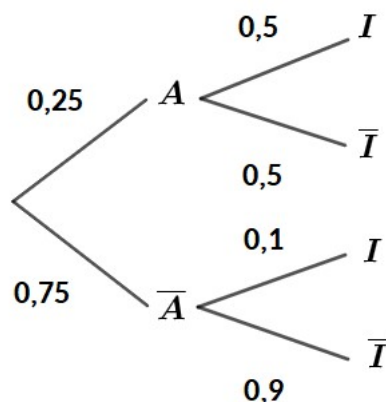
Au cours de l'année scolaire précédente, le lycée Sophie GERMAIN a testé une nouvelle version de l'espace numérique de travail (ENT). Une enquête a été réalisée auprès des 3 000 élèves du lycée, afin de savoir s'ils utilisent régulièrement l'ENT pour leurs études. On a obtenu les résultats suivants :

- 25 % des élèves du lycée sont inscrits en « post-bac » et parmi ces élèves, 50 % d'entre eux déclarent utiliser quotidiennement l'ENT.
- 10 % des élèves inscrits en « pré-bac » dans ce lycée déclarent utiliser quotidiennement l'ENT.

On interroge au hasard un élève du lycée et on définit les événements suivants

- A : « L'élève est inscrit en « post-bac ». »
- I : « L'élève utilise quotidiennement l'ENT. »

1) Compléter l'arbre pondéré traduisant la situation, donné en annexe **page 5**.



2) Calculer la probabilité que l'élève est un étudiant « post-bac » et utilise quotidiennement l'ENT pour ses études.

Calculons $P(A \cap I)$:

$$P(A \cap I) = P(A) \times P_A(I) = 0,25 \times 0,5 = 0,125$$

La probabilité que l'élève est un étudiant « post-bac » et utilise quotidiennement l'ENT pour ses études est de 0,125.

3) Calculer la probabilité que l'élève utilise quotidiennement l'ENT pour ses études.

Calculons $P(I)$. Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(I) = P(A \cap I) + P(\bar{A} \cap I) = P(A) \times P_A(I) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(I) = 0,125 + 0,75 \times 0,1 = 0,2$$

La probabilité que l'élève utilise quotidiennement l'ENT pour ses études est de 0,2

4) Cette nouvelle version de l'ENT sera jugée efficace si la probabilité que l'élève est un étudiant « post-bac » sachant qu'il utilise quotidiennement l'ENT pour ses études, est supérieure à 0,75.

Peut-on affirmer que cette nouvelle version de l'ENT est efficace ?

Commençons par calculer la probabilité que l'élève est un étudiant « post-bac » sachant qu'il utilise quotidiennement l'ENT pour ses études, à savoir $P_I(A)$:

$$P_I(A) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{0,125}{0,2} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

La probabilité que l'élève est un étudiant « post-bac » sachant qu'il utilise quotidiennement l'ENT pour ses études est égale à 0,625, étant inférieure à 0,75 on peut affirmer que cette nouvelle version de l'ENT n'est pas efficace.

5) Les événements A et I sont-ils indépendants ?

D'une part $P_I(A) = 0,625$; d'autre part $P(A) = 0,25$; ainsi $P_I(A) \neq P(A)$.

Les deux événements A et I ne sont pas indépendants.

Autre méthode : $P(A \cap I) = 0,125$ et $P(A) \times P(I) = 0,25 \times 0,2 = 0,05 \neq 0,125$ donc $P(A \cap I) \neq P(A) \times P(I)$ donc A et I ne sont pas indépendants

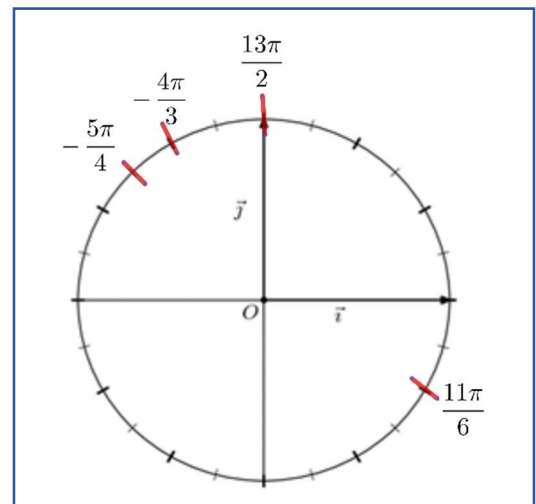
Exercice 3 (10 points=(2+2)+2+(1+1)+1+1)

1) a) Placer sur le cercle trigonométrique, donné en **annexe page 5**, les points repérant les nombres suivants.

$$\frac{-5\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}; -\frac{4\pi}{3}; \frac{13\pi}{2}$$

b) En déduire la valeur de chacun des nombres ci-dessous.

$$\sin\left(\frac{-5\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{13\pi}{2}\right)$$



$$\sin\left(\frac{-5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0,5; \quad \sin\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

2) Soit a un nombre de l'intervalle $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(a) = \frac{-1}{4}$.
Calculer $\cos(a)$.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ , dans cette question } \sin(a) = -\frac{1}{4} \text{ donc } \cos(a) = \sqrt{1 - \sin^2(a)} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ OU } \cos(a) = -\sqrt{1 - \sin^2(a)} = -\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Mais $a \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ **donc** $\cos(a) \leq 0$. **Finalement,** $\cos(a) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

3) a) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour tout x dans $[0; 2\pi]$

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{si et seulement} \quad x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$$

Les solutions de l'équation sont $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

b) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ de l'équation $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$.

Pour tout x dans $[-\pi; \pi]$

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{si et seulement} \quad x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$$

Les solutions de l'équation sont $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.
Déterminer la parité de f .

Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$f(-x) = \sin(-x)\cos(-x)$, **mais** $\sin(-x) = -\sin(x)$ **car la fonction sinus est impaire et**
 $\cos(-x) = \cos(x)$ **car la fonction cosinus est paire.**

Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$$

La fonction f est donc impaire sur $\mathbb{R}$.

5) Soit x un réel quelconque, parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a. $\cos(x + \pi) = \cos(x)$

b. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

c. $\sin(x + \pi) = \sin(x)$

d. $\cos(x + \pi) = -\sin(x)$

Réponse b. **Pour tout x dans $\mathbb{R}$,** $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

Exercice 4 (14 points : (2+(1,5+1)+1,5+(1+1,5+1,5+0,5+1)+(1+1+0,5))

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$.

Soit C_f sa courbe représentative.

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{6x}{(x^2+2)^2}$.

La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, avec un dénominateur ne s'annulant pas, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

(On peut aussi dire que f est une fonction rationnelle donc est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{u(x)}{w(x)}$, avec

- $u(x) = x^2 - 1$ et $u'(x) = 2x$
- $w(x) = x^2 + 2$ et $w'(x) = 2x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{u'(x)w(x) - u(x)w'(x)}{w^2(x)}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x(x^2+2) - (x^2-1)2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^3+4x-2x^3+2x}{(x^2+2)^2} = \frac{6x}{(x^2+2)^2}$

Finalement, on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{6x}{(x^2+2)^2}$.

2)

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 + 2)^2 > 0$. Donc, $f'(x)$ est du même signe que son numérateur $6x$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. (on peut aussi justifier les signes du tableau en disant qu'une fonction affine est du signe de a à droite de son 0)

On obtient le tableau de signe suivant, duquel on déduit les variations de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variation de f			

Car $f(0) = \frac{0^2-1}{0^2+2} = -\frac{1}{2}$

b) En déduire les extrema éventuels de la fonction f . Justifier.

D'après le tableau de variations f' s'annule en changeant de signe en 0, la fonction admet $f(0) = -0,5$ comme extremum local, atteint donc en $x = 0$. De plus, comme f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ puis croissante sur $[0 ; +\infty[$ cet extremum est un minimum sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2, est donnée par $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$.

L'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2, est donnée par :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2).$$

On a $f'(2) = \frac{6 \times 2}{(2^2 + 2)^2} = \frac{1}{3}$ **et** $f(2) = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 2} = 0,5$; d'où

$$y = \frac{1}{3}(x - 2) + 0,5 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 0,5 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$$

L'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2, est donc donnée par : $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$.

4) Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 4$.

a) Justifier que g dérivable sur R et calculer sa dérivée.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = -2 \times 3x^2 + 7 \times 2x - 4 = -6x^2 + 14x - 4$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -6x^2 + 14x - 4$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$ pour tout $x \in R$.

La fonction g' est un polynôme du second degré, pour étudier son signe, commençons par déterminer ses racines éventuelles :

$\Delta = 14^2 - 4 \times (-6) \times (-4) = 100 > 0$; le polynôme possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-14 - \sqrt{100}}{2 \times (-6)} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-14 + \sqrt{100}}{2 \times (-6)} = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$	
Signe de $g'(x)$	—	0	+	0	—
$a = -6 < 0$	(signe de a)	(signe de $(-a)$)		(signe de a)	

Ainsi :

- $g'(x) \leq 0$ **pour** $x \in]-\infty; \frac{1}{3}]$ **et pour** $x \in [2; +\infty[$
- $g'(x) \geq 0$ **pour** $x \in [\frac{1}{3}; 2]$.

b En déduire le tableau de variations de g sur R .

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
Variation de g				

$g\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{3} - 4 = \frac{-125}{27}$ et $g(2) = -2 \times 2^3 + 7 \times 2^2 - 4 \times 2 - 4 = 0$

c Calculer $g\left(\frac{-1}{2}\right)$.

$$g(-0,5) = -2 \times 0,5^3 + 7 \times (-0,5)^2 - 4 \times (-0,5) - 4 = 0$$

Ainsi $g(-0,5) = 0$.

d A l'aide des questions précédentes, montrer que : $\begin{cases} g(x) \geq 0 \text{ si } x \leq -\frac{1}{2} \\ g(x) \leq 0 \text{ si } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$

On peut en conclure en utilisant le tableau de variations de g , la valeur de $g(-0,5)$ que :

- $g(x) \geq 0$ **pour** $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}]$
- $g(x) \leq 0$ **pour** $x \in [-\frac{1}{2}; +\infty[$

5)

a) Montrer que pour tout $x \in R$, $f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{g(x)}{6(x^2+2)}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right)$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} - \frac{(x^2 + 2)\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right)}{x^2 + 2}$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} - \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2 + 2}$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 + 2}$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{-2x^3 + 7x^2 - 4x - 4}{6(x^2 + 2)}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{g(x)}{6(x^2+2)}$.

b) En déduire la position de la courbe C_f de la fonction f par rapport à la tangente T .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{g(x)}{6(x^2+2)}$; le dénominateur étant strictement positif, le signe de cette différence est du signe du numérateur $g(x)$.

En utilisant les résultats de la question 5)e), on obtient :

- $f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) \leq 0$ **pour** $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}]$;
la courbe C_f est en dessous de sa tangente T sur $] -\infty; -\frac{1}{2}]$
- $f(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right) \geq 0$ **pour** $x \in [-\frac{1}{2}; +\infty[$;
la courbe C_f est au-dessus de sa tangente T sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$

c) On donne en annexe page 5 la courbe C_f , représentée dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Tracer la droite T dans ce repère.

Voir annexe. On utilisera pour la tracer :

- la droite T passe par le point de coordonnées $(2 ; 0,5)$
- sa pente est égale à $\frac{1}{3}$

