Arithmétique 2

1 h 30 autorisée

I Exercice

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$. On suppose que le polynôme P admet une racine rationnelle $r = \dfrac{p}{q}$ avec $\text{PGCD}(p,q) = 1$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

1) Justifier que p divise q^3 puis que p divise q. En déduire que $p = \pm 1$.

2) Par un procédé identique, montrer que $q = 1$.

3) En déduire alors que le polynôme P n'admet pas de solution rationnelle.

II Exercice

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements :
L'hébergement A et l'hébergement B.
Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 € .
Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.
On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1) a) Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

   b) Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\,;y)$ possibles.

```
Entrée :        x et y sont des nombres
Traitement :    Pour x variant de 0 ...    (1)
                    Pour y variant de 0 ... (2)
                        Si ...          (3)
                            Afficher x et y
                        Fin Si
                    Fin Pour
                Fin Pour
Fin traitement
```

2) Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3) a) Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

   b) Déterminer une telle solution.

   c) Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4) Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

   Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

   Calculer ces nombres.

III Exercice

Partie A

On considère l'équation (E) : $15x - 26k = m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1) Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tel que $15u - 26v = 1$.

   Trouver un tel couple.

2) En déduire une solution particulière $(x_0\ ;\ k_0)$ de l'équation (E).

3) Montrer que $(x\ ;\ k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si

   $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$.

4) Montrer que les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\ ;\ k)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x = 26q + 7m \\ k = 15q + 4m \end{cases} \text{ où } q \in \mathbb{Z}.$$

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

- à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant,
- on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26,
- on associe à y la lettre correspondante.

Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

1) Coder le mot **MATHS**.

2) Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26.

   a) Montrer alors qu'il existe un entier relatif k tel que $15x - 26k = y - 7$.

   b) En déduire que $x \equiv 7y + 3 \pmod{26}$.

   c) En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.

3) Expliquer pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodée par la lettre B.

   Décoder le mot WHL.