DST n°2

3 h autorisée

Le barème sur 40 points est donné à titre indicatif

I Cours — 1,5 Points

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$.

II Exercice — 2 Points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ les inéquations d'inconnue n :

~~1) $2^n >$~~ 70

2) $0{,}02 > \dfrac{10^n}{11}$

III Exercice — 1,5 Points

Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{-x} + 2)$

IV Exercice — 1,5 Points

Résoudre dans $]1\,;+\infty[$, $\ln(x^2 - 1) \geqslant 0$.

V Exercice — 1,5 Points

Montrer que :

$$\forall x \in\,]0\,;+\infty[,\ \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$$

VI Déterminer les limites — 2 Points

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2 - \sqrt{x})\ln(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)$

VII Exercice — 10 Points

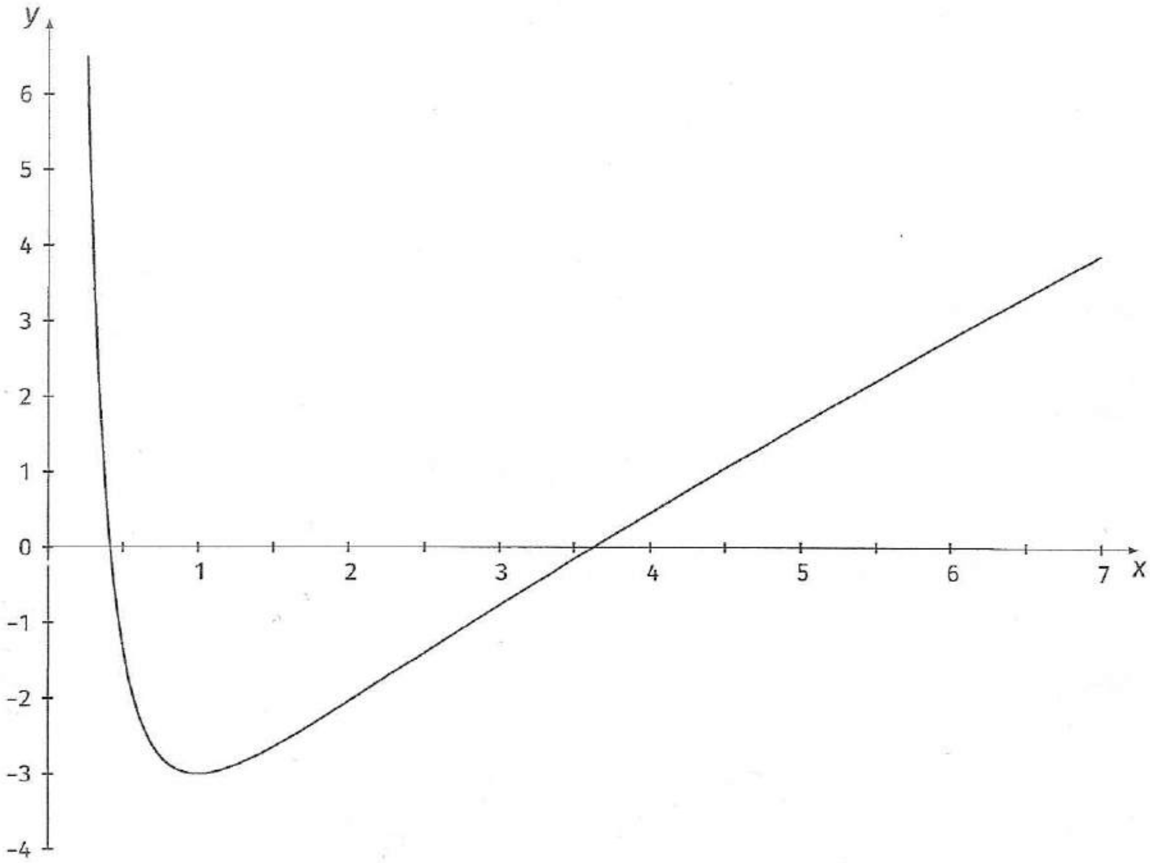
La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.

Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1) Soit φ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x.$$

a) Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b) Étudier les variations de φ sur $]0\,;+\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2) **a)** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que sur $]0\,;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
En déduire le tableau de variation de f.

c) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1\,;\ +\infty[$ avec $\beta \approx 3{,}61$ à 10^{-2} près.

d) Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln x - \frac{3}{2}(\ln x)^2.$$

Montrer que F a pour dérivée f sur $]0\,;+\infty[$.

VIII Exercice **6 Points**

Dans l'espace rapporté au repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points :

$$A(1;2;3), B(3;0;1), C(-1;0;1), D(2;1;-1), E(-1;-2;3), F(-1;-6;-3)$$

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1) Les trois points A, B et C sont alignés.

2) Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

3) La droite (EF) est parallèle au plan (ABC)

IX Exercice **14 Points**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On note I le milieu du segment [EF], J le milieu du segment [EH] et K le point du segment [EA] tel que $\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA}$ et L le point tel que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1) Tracer la figure correspondante.

2) a) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont colinéaires.

   b) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{LH}$ sont colinéaires.
   Aide : on pourra exprimer les vecteurs $\overrightarrow{LH}$ et $\overrightarrow{KJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$.

   c) En déduire que les plans (FHL) et (IJK) sont parallèles.

3) Dans cette question, on se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

   a) Donner sans justifier les coordonnées des points B, C, E, F et G dans ce repère.

   b) On note Δ la droite passant par le point E et de vecteur directeur $\vec{u}(4;4;-3)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   c) Les points du plan (ABC) ont une coordonnée nulle. Laquelle?

   d) En déduire les coordonnées du point M, d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

   e) Les droites Δ et (BF) sont-elles parallèles, sécantes ou non coplanaires? Justifier.

X Bonus **2 Points**

Donner le plus grand ensemble de définition possible de $\ln(\ln(2x))$ puis calculer sa dérivée.