Exercice 1 3 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des trois questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. On considère la droite (D) ayant pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & -t \\ z & = & -1-t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$,

   le point $M(1;2;3)$ et le point $N(1;-2;9)$.

   La droite (MN) et la droite (D) sont :

   (a) confondues ; (c) sécantes ;
   (b) strictement parallèles ; (d) non coplanaires.

2. On considère les points $A(0;8;6)$, $B(6;4;4)$ et $C(2;4;0)$.

   L'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ a pour valeur approchée au dixième de degré près :

   (a) 41° ; (b) 44,4° ; (c) 45,6° ; (d) 0,7°.

3. On considère à présent les points $D(1;-1;-1)$, $E(1;1;1)$ et $F(0;3;1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $2x+y-z+5=0$.

   (a) L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan (DEF) est réduite à un point ;
   (b) Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (DEF) sont confondus ;
   (c) Le plan $\mathcal{P}$ coupe le plan (DEF) selon une droite ;
   (d) Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (DEF) sont strictement parallèles.

Exercice 2 **7 points**

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0, 25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :
pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à $1,8$ mg.
   (a) Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
      u=......
      n = n+1
  return n
```

   (b) Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.
   (c) Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg. D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de $0,5$ mg par heure.
La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, par

$$f(t) = 2,5 - 1,5\mathrm{e}^{-0,2t},$$

où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.
On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à $1,8$ mg.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(t) = 1,8$ possède une unique solution α sur $[0\ ;\ +\infty[$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Selon ce modèle, au bout de combien de temps le médicament devient-il réellement efficace ? On donnera une valeur approchée à la minute.
5. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4. b. du modèle discret de la Partie A.

Exercice 3 **5,5 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, par

$$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) = 0$.
   Déterminer le signe de la fonction g' sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g et calculer le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{1+e^x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, représentée dans la figure ci-dessous.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2} ; 3\right)$.

1. Démontrer que le point $B(0 ; 2)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.
2. Soit x un réel quelconque.
   On note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x ; f(x))$.
   Démontrer que $AM^2 = g(x)$.
3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
   Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la distance AM est minimale.
4. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée et f'' la fonction dérivée de f'.
   (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.
   (b) Montrer que f admet pour unique point d'inflexion le point $B(0; 2)$.
   (c) Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B. Démontrer que l'équation réduite de T est $y = \frac{x}{2} + 2$.
   (d) Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T.
5. Démontrer que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).

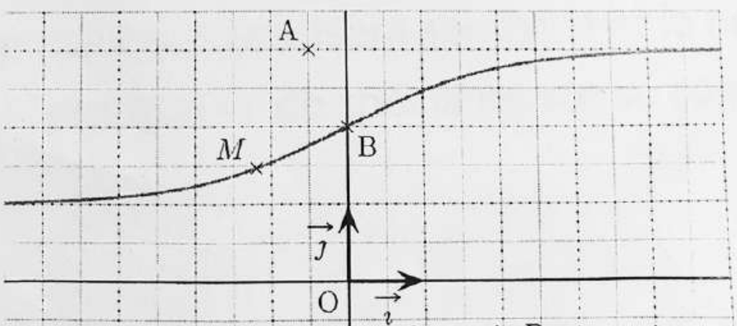
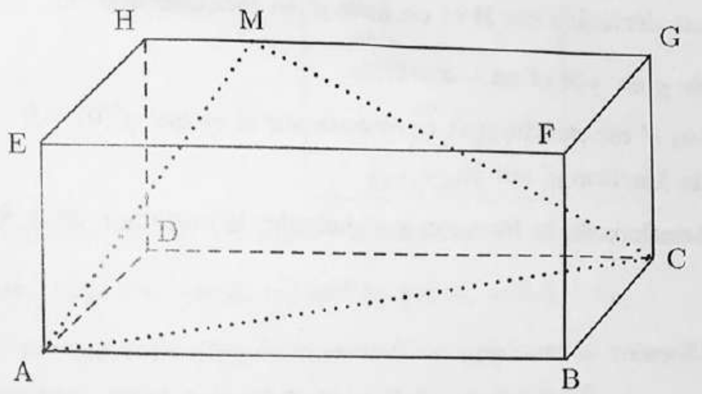


Figure de l'exercice 3, partie B.

Exercice 4 4,5 points

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 5, AD = 3 et AE = 2.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées (5 ; 0 ; 0), (0 ; 3 ; 0) et (0 ; 0 ; 2).



1. (a) Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).
2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   (a) Justifier que les coordonnées de M sont $(5k\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$.
   (c) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées (1 ; 3 ; 2).
On admet que le triangle AMC est rectangle en M .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times\, h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées (1 ; 3 ; 0).
   (a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).
   (b) Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
   (c) En déduire le volume du tétraèdre MACD.
4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
   Calculer la distance DP ; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.