G. VASSAL
PSI

Lycée du parc des loges, Évry,
2022-2023.

DEVOIR MAISON 4

À rendre le 31 janvier 2023

Problème

Soit $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VA indépendantes et dont la loi est définie par :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = \cancel{0}) = 1-p.$$

-1

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé *marche aléatoire dans* $\mathbb{Z}$. On peut imaginer un mobile partant de l'origine et se déplaçant à chaque instant (entier) de ± 1, les déplacements successifs étant indépendants. Alors S_n représente la position du mobile au bout de n déplacements.

1. (a) Déterminer $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) On note $f(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$. Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}.$$

2. Pour tout entier naturel non nul k, on note A_k l'évènement : « le mobile retourne pour la première fois à l'origine au bout de k déplacements ». On pose $v_k = \mathbb{P}(A_k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $v_0 = 0$.

   (a) Justifier brièvement que $A_k = \{S_k = 0\} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \{S_i \neq 0\}\right)$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap A_k).$$

   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$.

3. On note $g(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$.

   (a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière définissant g est supérieur ou égale à 1 et montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)x^2}.$$

   (b) Déterminer la probabilité de l'évènement A : « il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = 0$ ».

4. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

   (a) Soit T la variable aléatoire égale au premier indice n non nul pour lequel l'évènement $\{S_n = 0\}$ est réalisé, si un tel indice existe, et $+\infty$ sinon.
   Montrer que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.

   (b) Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_{2n} = \dfrac{2\binom{2n-2}{n-1}}{n4^n}$.

   (c) La variable T est-elle d'espérance finie ?