

BAC BLANC SPE MATHS

Sujet 2 Mercredi 18 janvier 2023

Calculatrice en mode examen autorisée - 4 heures –

Ce sujet comporte 4 exercices sur 4 pages

Exercice 1 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9415$.
2. a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

- b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.
 - a. Calculer v_0 .
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

- d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.
4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.
Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.
Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
Que pensez-vous de cette affirmation? Justifier la réponse.

Exercice 2 (5 points)

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97.

La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,014 65.

On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'évènement « un danger se présente ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2.
 - a. Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.
 - b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est 0,005.
4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.
Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à 0,01.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0,005\,25$.

On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} .

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

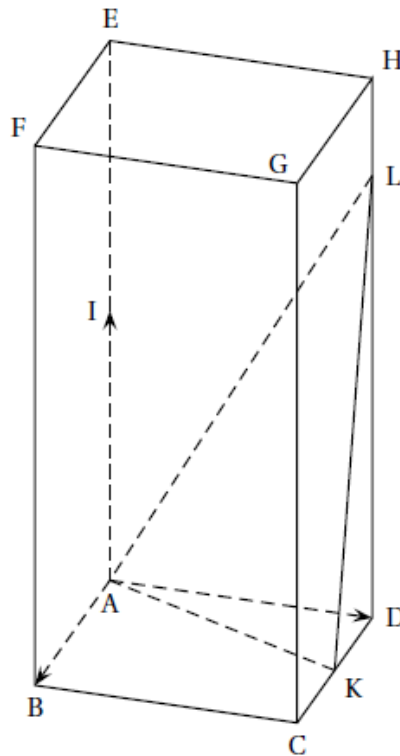
PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

Exercice 3 (5 points)

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci-dessous. Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$.

On admet que le point L a pour coordonnées $(0; 1; \frac{3}{2})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2.
 - a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6; -3; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
 - c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
 - d. En déduire que le point N de coordonnées $(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49})$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

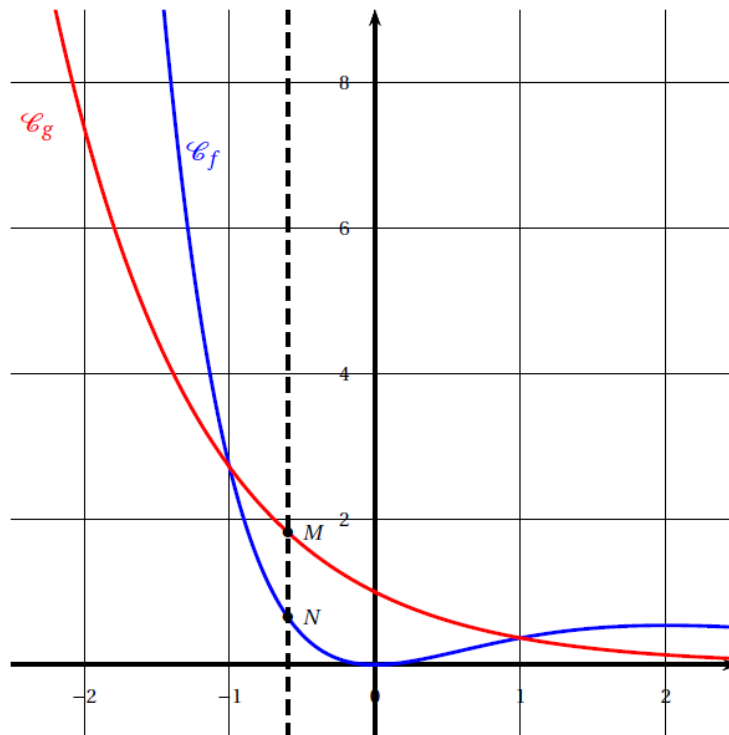
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3.
 - a. Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.
 - b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).
 - c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Exercice 4 (5 points)

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$



La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1.
 - a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
 - b. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1 ; 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x ; f(x))$ et N de coordonnées $(x ; g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN . On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2 e^{-x}$.
On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.
 - a. Montrer que $d'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$.
 - b. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
 - c. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0,1 près de la distance $M_0 N_0$.
3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.
On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = e^{-x} - x - 2$.
En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}_g$.