

Correction - BAC BLANC SPE MATHS

Sujet 2 Mercredi 18 janvier 2023

Exercice 1 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. • $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10000 + 200 = 9500 + 200 = 9700.$

• $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9700 + 200 = 9215 + 200 = 9415.$

2. a. On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 4000.$

Initialisation : $u_0 = 10000 > 4000$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n > 4000$, alors par produit par $0,95 > 0$, on a $0,95u_n > 0,95 \times 4000$, soit :

$0,95u_n > 3800$, et en ajoutant 200 à chaque membre :

$0,95u_n + 200 > 3800 + 200$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4000$: la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n > 4000$ quel que soit le naturel n .

b. On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4000, elle converge vers une limite ℓ , avec $\ell \geq 4000$.

3. a. Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000.$

b. Au choix :

Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95u_n - 3800 = 0,95 \left(u_n - \frac{3800}{0,95} \right) = 0,95(u_n - 4000) = 0,95v_n.$$

L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.

On peut donc calculer : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} =$

$$\frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - \frac{3800}{0,95})}{u_n - 4000} = \frac{0,95(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel n , montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. D'après le résultat précédent, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n.$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 4000 \iff u_n = v_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000.$$

d. Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4000$ (par somme de limites).

4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

Exercice 2 (5 points)

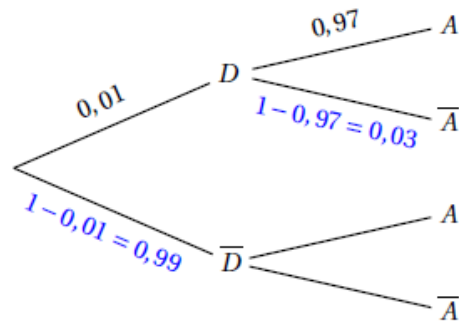
PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97. La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,01465.

On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'évènement « un danger se présente ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M .

1. On représenter les éléments de la situation que l'on connaît par un arbre pondéré.



2.
 - a. La probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active est :
 $P(D \cap A) = 0,01 \times 0,97 = 0,0097$.
 - b. On en déduit que la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active est : $P_A(D) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0,0097}{0,01465} \approx 0,662$.
3. La probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est :

$$P_{\overline{D}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}.$$

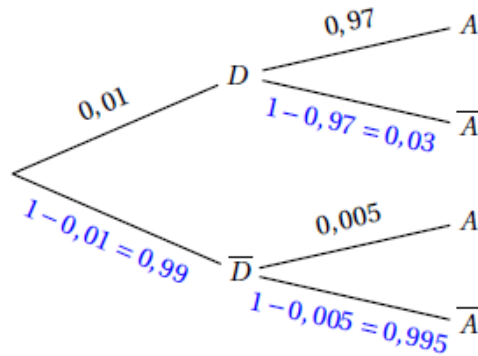
On sait que $P(A) = 0,01465$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A)$.

On déduit : $P(A) - P(D \cap A) = P(\overline{D} \cap A)$, donc $P(\overline{D} \cap A) = 0,01465 - 0,0097 = 0,00495$.

$$\text{Donc } P_{\overline{D}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0,00495}{0,99} = 0,005.$$

On peut compléter l'arbre :



4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.

Cette situation est représentée par les événements $D \cap \bar{A}$ et $\bar{D} \cap A$.

La probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est donc :

$$P(D \cap \bar{A}) + P(\bar{D} \cap A) = 0,01 \times 0,03 + 0,99 \times 0,005 = 0,00525 < 0,01.$$

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise. On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0,00525$.

On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.

1. On a une répétition de 5 épreuves assimilées à un tirage avec remise donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,00525$.
2. La probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement est : $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,00525^1 \times (1 - 0,00525)^{5-1} \approx 0,0257$.
3. La probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement est :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0,00525^0 \times (1 - 0,00525)^5 = 0,0260.$$

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

On cherche le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

Comme dans la partie B, la variable aléatoire Y qui donne le nombre de systèmes d'alarme défectueux suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,00525$.

On cherche n tel que $P(Y \geq 1) > 0,07$.

$$P(Y \geq 1) > 0,07 \Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) > 0,07 \Leftrightarrow 0,93 > P(Y = 0)$$

$$\begin{aligned} P(Y = 0) < 0,93 &\Leftrightarrow \binom{n}{0} \times 0,00525^0 \times (1 - 0,00525)^n < 0,93 \Leftrightarrow 0,99475^n < 0,93 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,99475^n) < \ln(0,93) \Leftrightarrow n \ln(0,99475) < \ln(0,93) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,93)}{\ln(0,99475)} \end{aligned}$$

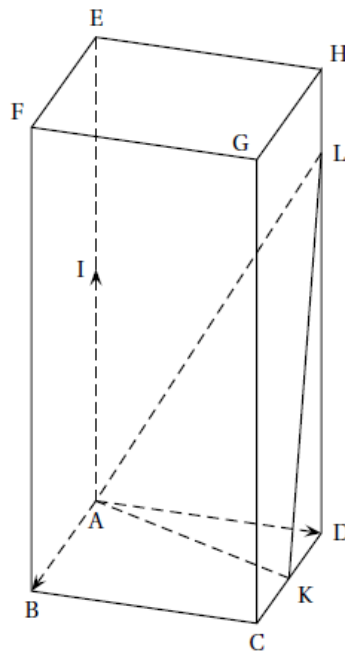
Or $\frac{\ln(0,93)}{\ln(0,99475)} \approx 13,8$, donc il faut prélever au moins 14 systèmes d'alarme pour que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

Vérification à la calculatrice

- Pour $n = 13$, on trouve $P(Y \geq 1) \approx 0,0661 < 0,07$.
- Pour $n = 14$, on trouve $P(Y \geq 1) \approx 0,0710 > 0,07$.

La notion de fonction logarithme n'ayant pas encore été vue dans toutes les classes on acceptera aussi la simple utilisation de la calculatrice dans cette question.

Exercice 3 (5 points)



1. Avec $C(1; 1; 0)$ et $D(0; 1; 0)$, on obtient $K(\frac{1}{2}; 1; 0)$, donc $\overrightarrow{AK}(\frac{1}{2}; 1; 0)$ et on a $\overrightarrow{AL}(0; 1; \frac{3}{2})$.

2. a. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AK} = 3 - 3 + 0 = 0$;
 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AL} = 0 - 3 + 3 = 0$: le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan AKL, il est donc orthogonal à ce plan; c'est donc un vecteur normal à ce plan.
- b. On a donc $M(x; y; z) \in (AKL) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 6x - 3y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$ et comme A appartient à ce plan on a : $0 + 0 + 0 + d = 0$.
 Conclusion : $M(x; y; z) \in (AKL) \Leftrightarrow 6x - 3y + 2z = 0$.

c. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur $\vec{n}$, donc :

$$M(x; y; z) \in \Delta \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{DM} = t \vec{n} \iff \begin{cases} x &= 6t \\ y-1 &= -3t \\ z &= 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x &= 6t \\ y &= 1-3t \\ z &= 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

d. Le point N est donc le point commun au plan (AKL) et à la droite Δ , donc ses coordonnées $(x; y; z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= 6t \\ y &= 1-3t \\ z &= 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow 6 \times 6t + (-3) \times (1-3t) + 2 \times 2t = 0 \iff$$

$$6x - 3y + 2z = 0$$

$36t - 3 + 9t + 4t = 0 \iff 49t = 3 \iff t = \frac{3}{49}$; en remplaçant dans les trois premières équations du système, on obtient :

$$\begin{cases} x &= 6 \times \frac{3}{49} \\ y &= 1 - 3 \times \frac{3}{49} \\ z &= 2 \times \frac{3}{49} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{18}{49} \\ y &= \frac{40}{49} \\ z &= \frac{6}{49} \end{cases}. \text{ Conclusion : } N\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49}\right).$$

3. a. Le triangle ADK est rectangle en D; on a par définition $AD = 1$ et $DK = \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}(\text{ADK}) = \frac{AD \times DK}{2} = \frac{1}{4}.$$

D'autre part $DL = \frac{3}{2}$, donc

$$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{8}.$$

b. On a $\overrightarrow{DN}\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49} - 1; \frac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{DN}\left(\frac{18}{49}; -\frac{9}{49}; \frac{6}{49}\right)$, donc :

$$DN^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(-\frac{9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2 = \frac{18^2 + 9^2 + 6^2}{49^2} = \frac{324 + 81 + 36}{49^2} = \frac{441}{49^2} = \frac{21^2}{49^2} = \left(\frac{21}{49}\right)^2.$$

$$\text{Donc } DN = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

c. En prenant comme base le triangle AKL, on a :

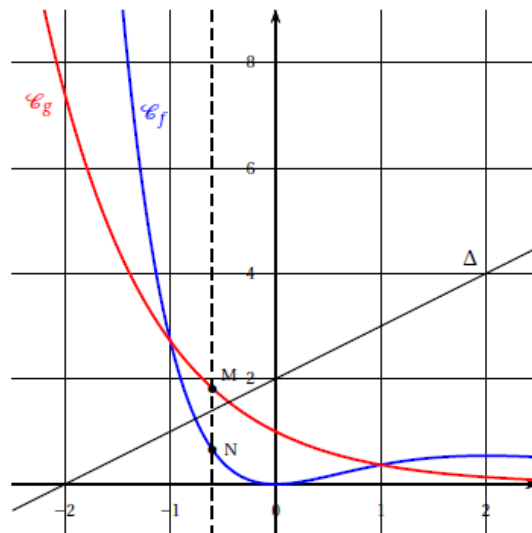
$$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{\mathcal{A}(\text{AKL}) \times DN}{3}, \text{ soit } \frac{1}{8} = \frac{\mathcal{A}(\text{AKL}) \times \frac{3}{7}}{3}, \text{ d'où}$$

$$\mathcal{A}(\text{AKL}) = 7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ (u. a.)}.$$

Exercice 4 (5 points)

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$



1. a. Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. On résout cette équation :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow (x^2 - 1) e^{-x} = 0$$
 Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $e^{-x} \neq 0$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1.$$
 Pour $x = -1$, $g(x) = e$, et pour $x = 1$, $g(x) = e^{-1}$.
 Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont donc $(-1; e)$ et $(1; e^{-1})$.
- b. Pour étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$, c'est-à-dire de $(x^2 - 1) e^{-x}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+
e^{-x}	+		+		+
$(x^2 - 1)e^{-x}$	+	0	-	0	+

Donc sur les intervalles $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$, et sur l'intervalle $]-1; 1[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$,

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1; 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x; f(x))$ et N de coordonnées $(x; g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN .
 On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2 e^{-x}$.

On admet que la fonction d est dérivable sur $[-1; 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

- a. $d'(x) = (-1) e^{-x} - (2x \times e^{-x} + x^2 \times (-1) e^{-x}) = e^{-x} (-1 - 2x + x^2) = e^{-x} (x^2 - 2x - 1)$
- b. $x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x - 1)^2 - 2 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x-1-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x-1+\sqrt{2}$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
e^{-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$e^{-x}(x^2-2x-1)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

- Sur l'intervalle $[-1 ; 1 - \sqrt{2}]$, $d'(x) > 0$ donc d est strictement croissante.
 - Sur l'intervalle $]1 - \sqrt{2} ; 1]$, $d'(x) < 0$ donc d est strictement décroissante.
- c. D'après la question précédente, la distance $d(x)$ est maximale pour $x_0 = 1 - \sqrt{2}$.
Elle vaut $d(1 - \sqrt{2}) = (1 - (1 + 2 - 2\sqrt{2})) e^{-1+\sqrt{2}} = (2\sqrt{2} - 2) e^{-1+\sqrt{2}} \approx 1,254$, soit 1,3 au dixième près..

3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.

On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = e^{-x} - x - 2$.

Pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, on étudie la fonction h .

$h'(x) = -e^{-x} - 1$ donc $h'(x) < 0$; la fonction h est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

- $h(-1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$; comme h est strictement décroissante, $h(x) > 0$ pour $x < -1$, donc h ne s'annule pas sur l'intervalle $] -\infty ; -1[$.
- $h(0) = e^0 - 2 = -1 < 0$; comme h est strictement décroissante, $h(x) < 0$ pour $x > 0$, donc h ne s'annule pas sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- Sur l'intervalle $[-1 ; 0]$, la fonction h est continue et strictement décroissante, et on sait que $h(-1) > 0$ et $h(0) < 0$; donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique.

La droite Δ et la courbe $\mathcal{C}_g$ ont donc un unique point d'intersection dont l'abscisse est comprise entre -1 et 0 .