

BAC BLANC SPE MATHS

Sujet 1 Mardi 17 janvier 2023

Calculatrice en mode examen autorisée - 4 heures –

Ce sujet comporte 6 pages – L'annexe est à rendre avec la copie

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .
3. a. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E , détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :  
    u = 0,5  
    n = 0  
    while .....  
        u = .....  
        n = n + 1  
    return n
```

- b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

- a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$.
- c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2 (4 points)

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques). Parmi ces courriels, 8 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.

On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.

Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à 0,01.

On note :

- S l'évènement « le courriel choisi est un spam » ;
- I l'évènement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- $\bar{S}$ et $\bar{I}$ les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.

2. a. Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à 0,072.

b. Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.

c. Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.

On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z , et quels sont ses paramètres ?

b. Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, deux au moins soient du spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

Exercice 3 (5 points)

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - e^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Dédire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie II

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

La courbes $\mathcal{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie**.

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathcal{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t , on note M le point de coordonnées $(t; e^{-t})$ de la courbe $\mathcal{C}$.

On considère la fonction h qui, au nombre réel t , associe la distance OM .

On a donc : $h(t) = OM$, c'est-à-dire :

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$$

- a. Montrer que, pour tout nombre réel t ,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

- b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha ; e^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathcal{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.

Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.

- a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T .

On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.

On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :

Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1 .

- b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

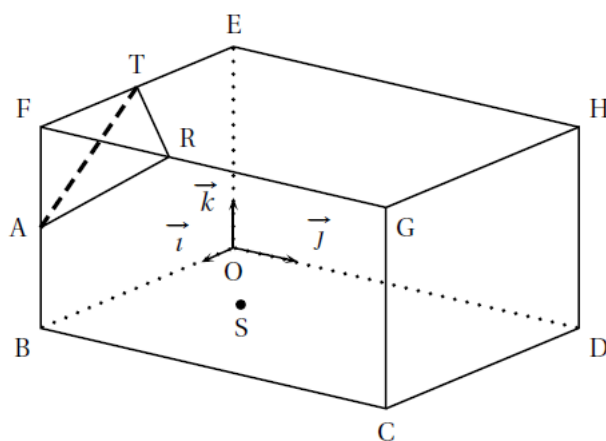
Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

Exercice 4 (6 points)

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m.

Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où $OB = 6$ m, $OD = 8$ m et $OE = 4$ m.

On utilise le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{6}\vec{OB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8}\vec{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\vec{OE}$.



Dans ce repère on a, en particulier $C(6; 8; 0)$, $F(6; 0; 4)$ et $G(6; 8; 4)$.

Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets $A(6; 0; 2)$, $R(6; 3; 4)$ et $T(3; 0; 4)$. Enfin, S est le point de coordonnées $(3; \frac{5}{2}; 0)$.

1.
 - a. Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.
 - b. Calculer le produit scalaire $\vec{AR} \cdot \vec{AT}$.
 - c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.
2.
 - a. Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).
3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).
 - a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S. Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

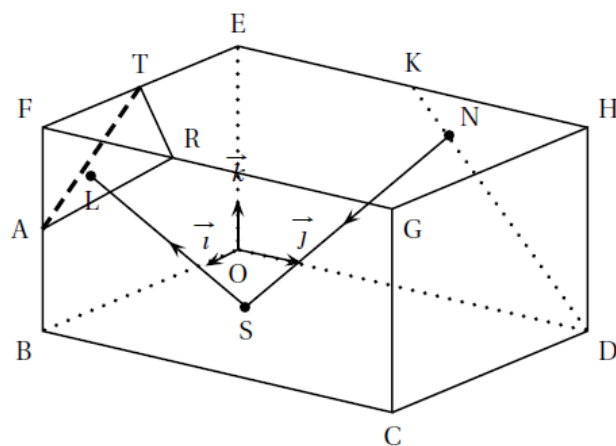
$$\begin{cases} x = 3+2k \\ y = \frac{5}{2}-2k \\ z = 3k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ , avec le plan (ART).

Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5; \frac{1}{2}; 3\right)$.

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] ou K est le milieu du segment [EH].

Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S.



a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$, le point N de coordonnées $(0; 8-4t; 4t)$ est un point du segment [DK].

b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

Nom :

Prénom :

Annexe exercice 3

