

CORRECTION BAC BLANC SPE MATHS JANVIER 2023 Sujet 1

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On a donc pour $n=0$, $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$.
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$.

a. On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2.$$

Initialisation : on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$; de plus $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} \leq 2$, donc :

$\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;

Hérédité : on suppose que pour $n \geq 0$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

La fonction f étant croissante les images des quatre nombres ci-dessus sont rangées dans le même ordre, soit : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$.

Or on a vu que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et on a $f(2) = \frac{8}{1+6} = \frac{8}{7}$;

de plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $\frac{4}{5} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{8}{7}$.

Or $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ et $\frac{8}{7} < 2$; on a donc finalement :

$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$: l'encadrement est donc vrai au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \geq 0$, il est vrai au rang $n+1$: par le principe de récurrence pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

b. La suite (u_n) est croissante et elle majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que : $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 2$.

c. La fonction f est continue car dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+$ donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$; on résout cette équation :

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff \frac{4\ell}{1+3\ell} = \ell \iff 4\ell = \ell(1+3\ell) \iff 0 = \ell(1+3\ell-4) \\ &\iff \ell(3\ell-3) = 0 \iff 3\ell(\ell-1) = 0 \iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell-1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\ell \geq \frac{1}{2}$, la seule solution possible est 1 ; la suite (u_n) converge vers 1.

3. a. On complète la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E , détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_p < E$:

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while 1 - u >= E
        u = 4 * u / (1 + 3 * u)
        n = n + 1
    return n
```

- b. On obtient $u_7 \approx 0,999939$, donc $1 - u_7 < 10^{-4}$. Le programme renvoie $n = 7$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

- a. Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de u_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1 - \frac{4u_n}{1+3u_n}} \text{ soit en multipliant chaque terme par } 1 + 3u_n :$$

$$v_{n+1} = \frac{4u_n}{1 + 3u_n - 4u_n} = \frac{4u_n}{1 - u_n} = 4 \frac{u_n}{1 - u_n} = 4v_n.$$

L'égalité, vraie pour tout naturel n , $v_{n+1} = 4v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 4, de premier terme $v_0 = \frac{u_0}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

On sait qu'alors, pour tout entier naturel n , $v_n = 1 \times 4^n = 4^n$.

- b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n} \iff v_n(1 - u_n) = u_n \iff v_n - u_n v_n = u_n \iff v_n = u_n v_n + u_n \iff v_n = u_n(v_n + 1).$$

Comme $v_n = 4^n$, $v_n \geq 1$, donc $v_n + 1 \geq 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\frac{1}{v_n + 1}$, on obtient $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

- c. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :

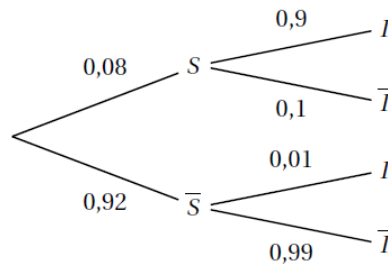
$$u_n = \frac{4^n}{4^n + 1} \text{ et en multipliant par } \frac{1}{4^n} :$$

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{4^n}}. \text{ Or } \frac{1}{4^n} = \frac{1^n}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0,25^n, \text{ d'où } u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}.$$

Comme $0 < 0,25 < 1$, on peut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,25^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1 + 0} = 1$.

Exercice 2

1.



2. a. On a $P(S \cap I) = P(S) \times P_S(I) = 0,08 \times 0,9 = 0,072$
 b. On a de même $P(\bar{S} \cap I) = P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(I) = 0,92 \times 0,01 = 0,0092$.
 D'après la loi des probabilités totales :
 $P(I) = P(S \cap I) + P(\bar{S} \cap I) = 0,072 + 0,0092 = 0,0812$.
 c. Il faut calculer $P_I(S) = \frac{P(I \cap S)}{P(I)} = \frac{0,072}{0,0812} \approx 0,887$ soit 0,89 au centième près.
3. a. Les tirages étant indépendants les uns des autres et étant assez nombreux on peut considérer que la variable Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,08$.
 b. On a $P(Z = 0) = 0,08^0 \times 0,92^{50} \approx 0,015466$;
 $P(Z = 1) = \binom{50}{1} \times 0,08 \times 0,92^{49} \approx 0,067426$, donc
 $P(Z \geq 2) = 1 - [P(Z = 0) + P(Z = 1)] = 1 - (0,015466 + 0,067426) \approx 0,917$, soit 0,92 au centième près.

Exercice 3

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - e^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-2x} = -\infty$; donc par somme de limites :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 • On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$; donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- la fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
 $f'(x) = 1 - (-2)e^{-2x} = 1 + 2e^{-2x}$.
 On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, donc $1 + 2e^{-2x} > 1 > 0$. La dérivée est positive donc la fonction f est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini.
- La fonction f est continue car dérivable et strictement croissante; comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$.
 La calculatrice donne :
 $f(0) = -1$ et $f(1) \approx 0,865$, donc $0 < \alpha < 1$;
 $f(0,4) \approx -0,05$ et $f(0,5) \approx 0,13$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$;
 $f(0,42) \approx -0,01$ et $f(0,43) \approx 0,007$, donc $0,42 < \alpha < 0,43$.

4. On a donc :

- sur $] -\infty ; \alpha[$, $f(x) < 0$;
- sur $] \alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$;
- et $f(\alpha) = 0$.

Partie II

1.

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$$

- a. Soit $u(t) = t^2 + e^{-2t}$, donc $h(t) = \sqrt{u(t)}$ fonction dérivable car composée de deux fonctions « racine » et h dérivables.

$$\text{Donc } h'(t) = \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \frac{2t - 2e^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \frac{t - e^{-2t}}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

- b. Le dénominateur étant positif, le signe de $h'(t)$ est celui du numérateur soit $f(t)$ dont on a vu le signe dans la partie I.

Donc :

- sur $] -\infty ; \alpha[$, $f(t) < 0$ donc $h'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle;
- sur $] \alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$ donc $h'(t) > 0$: la fonction est strictement croissante sur cet intervalle;
- et $f(\alpha) = 0$, donc $h(\alpha)$ est le minimum de la fonction h .

La distance OM est donc minimale pour $t = \alpha$ et l'ordonnée de M est alors $e^{-\alpha}$.

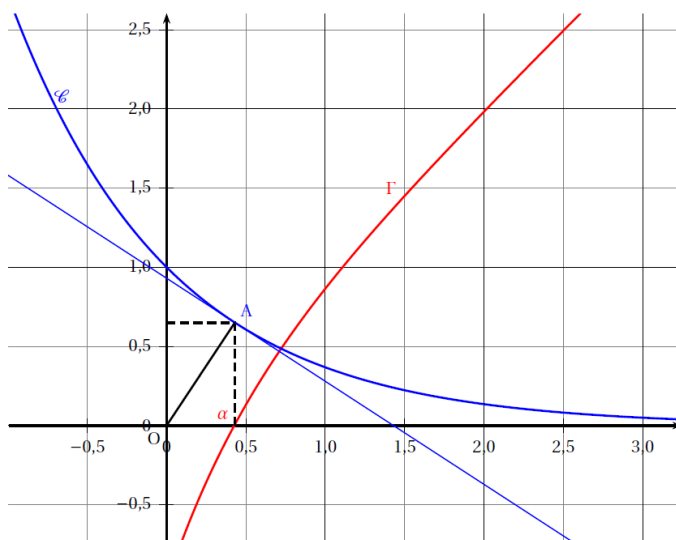
Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point $A(\alpha ; e^{-\alpha})$.

α est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Il suffit de tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point, elle coupe $\mathcal{C}$ au point A

2. a. Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $g'(\alpha) = -e^{-\alpha}$
- b. D'après le rappel le produit des coefficients directeurs est $-e^{-\alpha} \times \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = -\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}$.

or on sait que $f(\alpha) = 0 \iff \alpha - e^{-2\alpha} = 0 \iff \alpha = e^{-2\alpha} \iff \frac{e^{-2\alpha}}{\alpha} = 1$, donc finalement le produit des coefficients directeurs est égal à -1 . La droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Voir à la fin.



Exercice 4

En utilisant le repère fourni $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points notés ont pour coordonnées : A(6 ; 0 ; 2), B(6 ; 0 ; 0), C(6 ; 8 ; 0) D(0 ; 8 ; 0), E(0 ; 0 ; 4), F(6 ; 0 ; 4), G(6 ; 8 ; 4), H(0 ; 8 ; 4), I(6 ; 0 ; 2), R(6 ; 3 ; 4), T(3 ; 0 ; 4) et S $\left(3; \frac{5}{2}; 0\right)$

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{AR} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AT} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$AR = \|\overrightarrow{AR}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ et } AT = \|\overrightarrow{AT}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$\|\overrightarrow{AR}\| = \|\overrightarrow{AT}\| \text{ donc le triangle ART est isocèle en A.}$$

b. $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AR} = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 4$

c. Utilisons la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = \|\overrightarrow{AR}\| \times \|\overrightarrow{AT}\| \times \cos(\widehat{RAT})$

$$\text{donc } \cos(\widehat{RAT}) = \frac{\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}}{\|\overrightarrow{AR}\| \times \|\overrightarrow{AT}\|} = \frac{4}{\sqrt{13}^2} = \frac{4}{13} \text{ donc } \widehat{RAT} = \arccos\left(\frac{4}{13}\right) \approx 72,1^\circ$$

2. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{JK} = k \times \overrightarrow{JL}$.

En effet le système
$$\begin{cases} 0 &= k \times (-3) \\ 3 &= k \times 0 \\ 2 &= k \times 2 \end{cases}$$
 n'admet pas de solution. Donc ils définissent une

base du plan (ART). Calculons :

$\vec{n} \cdot \vec{AR} = 2 \times 0 + (-2) \times 3 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AT} = 2 \times (-3) + (-2) \times 0 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$.
Donc $\vec{n} \perp \vec{AR}$ et $\vec{n} \perp \vec{AT}$ donc $\vec{n}$ est normal à tout vecteur du plan (ART), donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ART).

- b. Le plan (ART) a pour équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$, où $(a ; b ; c)$ sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\vec{n}$, on obtient : (ART) : $2x - 2y + 3z + d = 0$.

Or $A \in (\text{ART})$ donc $12 - 0 + 6 + d = 0$ donc $d = -18$.

Donc (ART) a pour équation $2x - 2y + 3z - 18 = 0$.

3. a. La droite Δ est orthogonale au plan (ART), donc elle admet comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$, vecteur normal à ce plan. Elle passe par le point $S\left(3; \frac{5}{2}; 0\right)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x &= 3 + 2k \\ y &= \frac{5}{2} - 2k \\ z &= 0 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \text{ soit } \begin{cases} x &= 3 + 2k \\ y &= \frac{5}{2} - 2k \\ z &= 3k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

- b. Les coordonnées du point L sont les uniques solutions du système :

$$(S) \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \\ 2x - 2y + 3z - 18 = 0 \end{cases} \quad \text{En remplaçant } x, y \text{ et } z \text{ dans la dernière équation, on obtient :}$$

$$2x - 2y + 3z - 18 = 0 \iff 2(3 + 2k) - 2\left(\frac{5}{2} - 2k\right) + 3 \times 3k - 18 = 0 \iff 17k - 17 = 0 \iff k = 1$$

Donc $x = 3 + 2k = 5$, $y = \frac{5}{2} - 2k = \frac{1}{2}$ et $z = 3k = 3$. Le point L a pour coordonnées $\left(5; \frac{1}{2}; 3\right)$.

4. Le milieu K de [EH] a donc pour coordonnées $(0; 4; 4)$. N a pour coordonnées $(0; 8 - 4t; 4t)$.

Pour $t \in [0; 1]$, les vecteurs $\vec{DK}$ et $\vec{DN}$ ont pour coordonnées : $\vec{DK} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{DN} \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$.

On remarque alors que $\vec{DN} = t \times \vec{DK}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires, donc les points D, K et N sont alignés.

Pour vérifier que N est un point du segment [DK], montrons que $\vec{NK} \cdot \vec{ND} \leq 0$:

$$\vec{NK} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 + 4t \\ 4 - 4t \end{pmatrix} \text{ et } \vec{ND} \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \\ -4t \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{NK} \cdot \vec{ND} = 0 \times 0 + (-4 + 4t) \times 4t + (4 - 4t) \times (-4t) = 32t^2 - 32t = 32t(t - 1).$$

$t \in [0; 1]$ donc $32t(t - 1) \leq 0$ donc N est un point du segment [DK].

5. Les vecteurs $\vec{SL}$ et $\vec{SN}$ ont pour coordonnées : $\vec{SL} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{SN} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{11}{2} - 4t \\ 4t \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{SL}$ et $\vec{SN}$ sont orthogonaux donc $\vec{SL} \cdot \vec{SN} = 0$.

$$\vec{SL} \cdot \vec{SN} = 0 \iff 2 \times (-3) + (-2) \times \left(\frac{11}{2} - 4t\right) + 3 \times 4t = 0 \iff 20t - 17 = 0 \iff t = \frac{17}{20}.$$

Le point N aura alors pour coordonnées : $N\left(0; 8 - 4 \times \frac{17}{20}; 4 \times \frac{17}{20}\right)$ soit $N\left(0; \frac{23}{5}; \frac{17}{5}\right)$