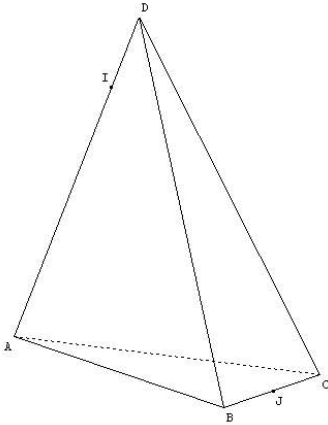


Exercice 1 : position relative

Soit $ABCD$ un tétraèdre

Soit I un point du segment $[AD]$

et J un point du segment $[BC]$

Déterminer l'intersection des plans
 (ADJ) et (BCI)

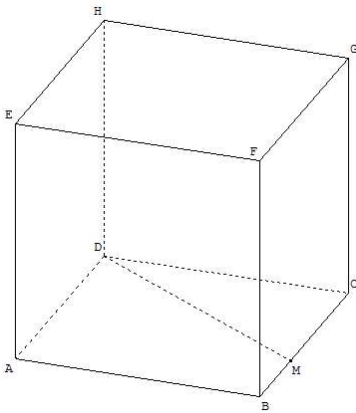
Solution

Les plans (ADJ) et (BCI) ne sont pas confondus car les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.

Le point I appartient à la droite (AD) donc au plan (ADJ) et également au plan (BCI) .

Le point J appartient à la droite (BC) donc au plan (BCI) et également au plan (ADJ) .

Or I et J sont deux points distincts donc les plans (ADJ) et (BCI) sont sécants suivant la droite (IJ)

Exercice 2 : orthogonalité

Soit $ABCDEFGH$ un cube

Soit M un point du segment $[BC]$

1) Démontrer que la droite (FB) est orthogonale
au plan (ABC) .

2) En déduire que la droite (FB) est orthogonale
à la droite (DM) .

Solution

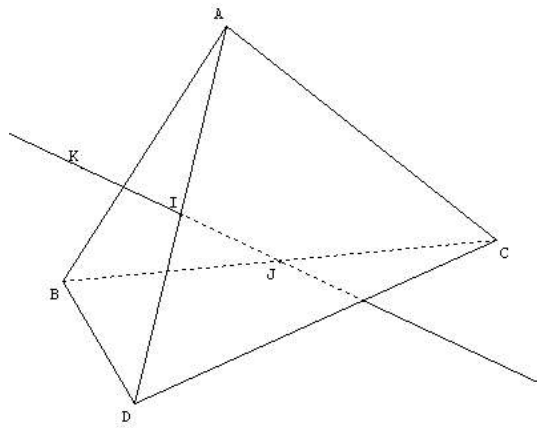
1) La droite (FB) est orthogonale aux droites (BA) et (BC) , deux droites sécantes en B du plan (ABC) donc la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC) .

2) La droite (FB) est orthogonale au plan (ABC) donc elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à la droite (DM) .

Exercice 3 : décomposition vectorielle et vecteurs colinéaires

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On considère les points I et J , milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$ et le point K tel que :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD})$$



- 1) Exprimer les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$
- 2) Montrer que le point K appartient à la droite (IJ) .

Solution

1) D'après la relation de Chasles : $\vec{IK} = \vec{IA} + \vec{AK}$

Comme I est le milieu de $[AD]$ alors $\vec{IA} = -\frac{1}{2}\vec{AD}$ et $\vec{AK} = \frac{1}{2}(\vec{BD} + \vec{CD})$ donc $\vec{IK} = -\frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}(\vec{BD} + \vec{CD})$

En utilisant la relation de Chasles pour les vecteurs $\vec{BD}$ et $\vec{CD}$, on a :

$$\vec{IK} = -\frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \boxed{-\frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}}$$

$$\text{De même, } \vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AB} + \vec{BJ} = -\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = -\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \boxed{\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AD}}$$

2) Ainsi $\vec{IK} = -\vec{IJ}$ donc les vecteurs $\vec{IK}$ et $\vec{IJ}$ sont colinéaires donc le point K appartient à la droite (IJ) .

Exercice 4 : coordonnées et colinéarité

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donné.

Dans chacun des cas, préciser si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

1) $\vec{u}(1; -1; 1)$ et $\vec{v}(1; 1; -3)$

2) $\vec{u}\left(\sqrt{6}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{8}\right)$ et $\vec{v}\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}; 4\right)$

Solution

1) On cherche un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k \\ -1 = k \\ 1 = -3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k \\ -1 = k \\ -\frac{1}{3} = k \end{cases} \quad \text{pas de solution}$$

Il n'existe pas de réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2) On cherche un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6} = k\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{k}{2} \\ \sqrt{8} = 2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k = \sqrt{2}$$

Donc $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{v}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 5 : coordonnées et coplanarité

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donné.

Dans chacun des cas, préciser si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

1) $\vec{u}(1; -1; 1)$, $\vec{v}(1; 1; -3)$ et $\vec{w}(0; -2; 4)$.

2) $\vec{u}(1; -1; 1)$, $\vec{v}(1; 1; -3)$ et $\vec{w}(0; -2; 5)$

Solution

1) On cherche deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$$w = x\vec{u} + y\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x + y \\ -2 = -x + y \\ 4 = x - 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x + y \\ x - 2 = y \\ 4 = x - 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x + x - 2 \\ x - 2 = y \\ 4 = x - 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Donc $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

2) On cherche deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$$\begin{aligned}
 w = x\vec{u} + y\vec{v} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x + y \\ -2 = -x + y \\ 5 = x - 3y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x + y \\ x - 2 = y \\ 5 = x - 3y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x + x - 2 \\ x - 2 = y \\ 5 = x - 3y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ 5 = 4 \end{cases} \text{ pas de solution}
 \end{aligned}$$

Il n'existe pas de réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 6 : représentation paramétrique de droites

Soit la droite Δ_1 de représentation paramétrique : $\Delta_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1) Déterminer deux vecteurs directeurs et deux points de Δ_1 .

2) Les points $D \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ -11 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ sont-ils des points de Δ_1 ?

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (UV) avec $U \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $V \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) Soit la droite Δ_2 de représentation paramétrique : $\Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t \\ y = 3 - \frac{4}{3}t \\ z = 5 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Etudier la position relative des droites Δ_1 et Δ_2 .

5) Soit la droite Δ_3 de représentation paramétrique : $\Delta_3 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 5 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Etudier la position relative des droites Δ_1 et Δ_3 .

6) Soit la droite Δ_4 de représentation paramétrique : $\Delta_4 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$

Etudier la position relative des droites Δ_1 et Δ_4

Solution

$$1) \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ sont des vecteurs directeurs de } \Delta_1$$

$$\text{Pour } t = 0 : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \text{ donc } A(2; -3; 4) \in \Delta_1$$

$$\text{Pour } t = 1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 7 \end{cases} \text{ donc } B(1; -1; 7) \in \Delta_1$$

$$2) \text{ On cherche un réel } t \text{ tel que : } \begin{cases} 7 = 2 - t \\ -13 = -3 + 2t \\ -11 = 4 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = -5$$

$$\text{Donc } D \in \Delta_1$$

$$\text{On cherche un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} 5 = 2 - t \\ 2 = -3 + 2t \\ 7 = 4 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{5}{2} \\ t = 1 \end{cases} \text{ pas de solution}$$

$$\text{Donc } E \notin \Delta_1$$

$$3) \overrightarrow{UV} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$M(x; y; z) \in (UV) \Leftrightarrow \overrightarrow{UM} = t\overrightarrow{UV} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -2t \\ y + 2 = -t \\ z - 3 = -3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc une représentation paramétrique de la droite } (UV) \text{ est : } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$4) \text{ Les vecteurs directeurs des droites } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ sont } \vec{v}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a $\vec{v}_1 = \frac{3}{2}\vec{v}_2$ donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires donc les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.
Soit $A(2; -3; 4)$ un point de Δ_1 .

$$\text{On cherche un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} 2 = 1 + \frac{2}{3}t \\ -3 = 3 - \frac{4}{3}t \\ 4 = 5 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{9}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ pas de solution}$$

$$\text{Donc les droites } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ sont strictement parallèles.}$$

5) Les vecteurs directeurs des droites Δ_1 et Δ_3 sont $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

On cherche un réel k tel que : $\vec{v}_1 = k\vec{v}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k \\ 2 = -k \\ 3 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -2 \\ k = -\frac{2}{3} \end{cases}$ pas de solution

Donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas colinéaires donc les droites Δ_1 et Δ_3 ne sont pas parallèles

On cherche deux réels t et s tels que

$$\begin{cases} 2 - t = 1 + s \\ -3 + 2t = 3 - s \\ 4 + 3t = 5 - 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 - t \\ -3 + 2t = 3 - 1 + t \\ 4 + 3t = 5 - 2s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -4 \\ t = 5 \\ 4 + 3t = 5 - 2s \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -4 \\ t = 5 \\ 19 = 13 \end{cases} \text{ pas de solution}$$

Donc les droites Δ_1 et Δ_3 ne sont pas sécantes.

Les droites Δ_1 et Δ_3 ne sont ni parallèles ni sécantes donc elles sont non coplanaires.

6) Les vecteurs directeurs des droites Δ_1 et Δ_4 sont $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

On cherche un réel k tel que : $\vec{v}_1 = k\vec{v}_4 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k \\ 2 = -k \\ 3 = -5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -2 \\ k = -\frac{3}{5} \end{cases}$ pas de solution.

Donc les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_4$ ne sont pas colinéaires donc les droites Δ_1 et Δ_4 ne sont pas parallèles

On cherche deux réels t et s tels que : $\begin{cases} 2 - t = 1 + s \\ -3 + 2t = 3 - s \\ 4 + 3t = -1 - 5s \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 - t = 1 + s \\ -3 + 2t = 3 - s \\ 4 + 3t = -1 - 5s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 - t \\ -3 + 2t = 3 - 1 + t \\ 4 + 3t = -1 - 5s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -4 \\ t = 5 \end{cases}$$

Donc les droites Δ_1 et Δ_4 sont sécantes en un point Z de coordonnées $(-3 ; 7 ; 19)$.