

Série d'exercices de TD n° 2.

Exercice 82

En résolvant un système d'équations, montrer que $(-1, 1, -12)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, -2)$ et $(3, 2, 1)$ avec des coefficients que l'on déterminera.

Exercice 83

Montrer que $(-1, 1, -12)$ n'est pas combinaison linéaire de $(1, 1, -2)$ et $(1, 2, 1)$.

Exercice 84

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en utilisant la méthode de combinaison de lignes le système d'équations à 3 inconnues x, y, z

suivant :
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 85

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en utilisant la méthode de combinaison de lignes le système d'équations à 3 inconnues x, y, z

suivant :
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ 5x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

Exercice 86

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en utilisant la méthode de combinaison de lignes le système d'équations à 3 inconnues x, y, z

suivant :
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ 5x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

Exercice 87

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en utilisant la méthode de combinaison de lignes le système d'équations à 3 inconnues x, y, z

suivant :
$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 5x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

Exercice 88

On définit une fonction u sur $[0, +\infty[$ et une fonction g sur $[0 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$ ainsi :

pour tout x de $[0, +\infty[$,

$$u(x) = \sqrt{x}$$

pour tout x de $[0 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$ $g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}$

a) Donner l'expression de $u'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$, puis la valeur de $u'(4)$.

b) remplir le tableau de valeurs suivant, en prenant une précision de 0,0001

x	6	4,5	4,2	3,7	3,99	4,001
$g(x)$						

c) d'après ce tableau $g(x)$ semble-t-elle s'approcher d'une valeur fixe lorsque x s'approche de 4 ?

d) Trouver, et justifier, un lien entre $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$, u , u' .

e) comparer les résultats de d) et c).

Exercice 89

On considère 3 variables x, y, z liées par la relation $z = x^2 y^3$.

1°) On fixe $y = 2$.

a) z est alors une fonction d' x , exprimer la dérivée de cette fonction,

b) indiquer la valeur en $x=1$ de la dérivée établie au a). Cette valeur s'appellera bientôt la dérivée partielle de z par rapport à x , à y constant, en $(x, y) = (1, 2)$

2°) On fixe $x=1$. z est alors une fonction d'y.

a) Exprimer la dérivée de cette fonction.

b) Indiquer la valeur en $y=2$ de la dérivée établie au a)..

Exercice 90

Mêmes questions qu'à l'exercice précédent en remplaçant la relation entre x , y et z par : $z = \exp(-3x^2y)$

Exercice 91

En utilisant la dérivée de la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe x^4 , montrer qu'à mesure que x prend des valeurs de plus en plus proches de 2, $\frac{x^4-16}{x-2}$ qui est égale aussi à $\frac{x^4-2^4}{x-2}$, s'approche de 32— ce qui se

note $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2} = 32$.

Exercice 92 Soit la fonction $f: x \in]-2; +\infty[\mapsto f(x) = \ln(x+2)$

a) Que vaut $f(0)$?

b) En utilisant la fonction f , et en remarquant que $x = x-0$, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x} = \frac{1}{2}$.

c) En déduire qu'il existe un intervalle ouvert J , contenant 0, $J =]-a, +a[$ (on ne demande pas de calculer la valeur de a) tel que pour tout x de J , $\frac{1}{4}|x| \leq |\ln(x+2) - \ln 2| \leq \frac{3}{4}|x|$

Exercice 93 Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m$, pour tout m réel (pas forcément entier), en utilisant la dérivée en 0 de la fonction qui à tout x de $] -1, +\infty[$ associe $(1+x)^m$. On pourra remarquer que $x = x - 0$.

Exercice 94 Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3$, en utilisant une dérivation (on pourra remarquer que $x = x - 0$).

Attention, ce n'est pas la dérivée de la fonction qui à x associe $\frac{e^x - 1}{x}$ qui répondra à la question.

Exercice 95 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi : (pour tout x de $\mathbb{R}$) $f(x) = 4x^2$ et le polynôme $P(h) = 4(3+h)^2$

Développer ce polynôme, puis en déduire sans calculs supplémentaires , en particulier sans utiliser les dérivées usuelles:

1. $f'(3)$

2. une équation de la droite tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 et d'ordonnée 36

3. la fonction différentielle de f au point $x=3$

Exercice 96 On considère la fonction d'une variable réelle f définie ainsi :

(pour tout x de $]0, +\infty[$) $f(x) = 1 + x \ln(2x)$

1°) Donner l'expression de la différentielle de f .

2°) Donner en particulier l'expression de cette différentielle en $x=1$.

3°) Indiquer la signification des différents termes apparaissant dans la réponse précédente, 2°).

Exercice 97 Donner les expressions des **différentielles** des fonctions d'une variable réelle suivantes :

1°) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{2x+3}{1+x^2}$ 2°) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \sqrt{1+e^{3x}}$

2°) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x \exp(2x+1)$

Exercice 98 Calculer les différentielles des expressions suivantes

1°) $y(x) = x \ln(2x+1) + e^{3x}$

2°) $y(x) = \exp(-3x^2)$

Exercice 99 On définit les 3 fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$f: x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = 1 + 3x + \frac{1}{1 + \exp(2x)}$$

$$u: x \in \mathbb{R} \mapsto u(x) = f(4x + 1)$$

$$v: x \in \mathbb{R} \mapsto v(x) = f(5x - 2)$$

Trouver l'expression de $f'(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$. Trouver l'expression de $u'(x)$, $v'(x)$ en fonction de x à l'aide de celle de f et de la formule de dérivation de fonctions composées.

Exercice 100 On définit les 3 fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$

$$h: x \in \mathbb{R} \mapsto h(x) = x + \frac{3x+1}{x^2+1}$$

$$u: x \in \mathbb{R} \mapsto u(x) = h(2x+3)$$

$$v: x \in \mathbb{R} \mapsto v(x) = h(4x-1)$$

Trouver l'expression de $h'(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$. Trouver l'expression de $u'(x)$, $v'(x)$ en fonction de x à l'aide de celle de h et de la formule de dérivation de fonctions composées.

Exercice 101 f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on ne connaît pas l'expression mais on connaît celle de sa dérivée :

$$f': x \in \mathbb{R} \mapsto f'(x) = \exp(-x^2).$$

Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction k définie par : $x \in \mathbb{R} \mapsto k(x) = f(3x+2)$.

Exercice 102 f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée s'exprime ainsi :

$$(\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}) f'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Déterminer l'expression de la dérivée de $f(3x+2)$.

Exercice 103 Calculer les dérivées logarithmiques des fonctions f définies par les expressions suivantes,

préciser les ensembles sur lesquels elles sont définies. 1°) $f(x) = \sqrt{x} \exp(2x-3)$ 2°) $f(x) = \frac{(2x+3)}{(4x+1)(3x-2)}$

Exercice 104 On considère la fonction f définie ainsi : pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) = 2x + \ln(x)$.

1°) Etablir le tableau de variations de la fonction f .

2°) Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ —rappel : cela signifie que pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un unique nombre x de $]0, +\infty[$ solution de $f(x) = y$.

f admet donc une fonction réciproque f^{-1} .

3°) Déterminer $f(1)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(6 + \ln(3))$.

4°) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et en $6 + \ln(3)$, et calculer $f^{-1}'(2)$, $f^{-1}'(6 + \ln(3))$.

Exercice 105 On considère la fonction f définie ainsi : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x + \exp(2x)$.

1°) Etablir le tableau de variations de la fonction f .

2°) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ —rappel : cela signifie que pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un unique nombre x de $\mathbb{R}$ solution de $f(x) = y$.

f admet donc une fonction réciproque f^{-1} .

3°) Déterminer $f(0)$, $f(1)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2 + \exp(4))$.

4°) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et en $2 + \exp(4)$, et calculer $f^{-1}'(1)$, $f^{-1}'(2 + \exp(4))$.

Exercice 106

Montrer que f est une bijection de I dans J dans les cas suivants. Exprimer la réciproque f^{-1} lorsque c'est possible. Déterminer $(f^{-1})'(y_0)$ pour les valeurs de y_0 indiquées.

1°) $f(x) = \sqrt{x^3-1} + 1$ avec $I=J=]1; +\infty[$, y_0 décrivant tout J

2°) $f(x) = \sqrt{1+\ln x}$, I, J à préciser, y_0 décrivant tout J .

3°) $f(x) = 2x + \sin(x) + 1$, $I=J=\mathbb{R}$, $y_0 = 1$, puis $y_0 = 2\pi + 1$ —on pourra commencer par calculer $f(2\pi)$.

Exercice 107 Chercher les maxima des fonctions suivantes:

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -1$ pour $x < -1$; $f(x) = 0$ pour $x > 2$, $f(x) = x \exp(-x)$ pour $-1 \leq x \leq 2$

g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 0$ pour $x < 0$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ pour $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = \frac{1}{2}$ pour $x > 1$.

Exercice 108 Calculer les dérivées partielles des fonctions de 2 variables réelles suivantes :

1° f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y) = x^4 y + 3y^2 + 1$

2° f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y) = x \exp(-2xy+1)$

3° f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y) = \frac{2x+y}{3x^2+1}$

Exercice 109 On cherche les fonctions f définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$df = (y^2 + 6x)dx + (2xy - 1)dy$$

a) On fixe une valeur y_0 pour y . Quelles sont les fonctions numériques d'une variable, g , définies sur $\mathbb{R}$, telles que $g'(x) = y_0^2 + 6x$?

b) en déduire quelles sont les fonctions f de 2 variables définies sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 6x.$$

c) En déduire quelle est la forme générale de la dérivée partielle par rapport à la variable y d'une telle fonction.

d) En déduire quelles sont les fonctions de 2 variables $f(x, y)$ définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que $df = (y^2 + 6x)dx + (2xy - 1)dy$ sur tout $\mathbb{R}^2$.

Exercice 110 (on pourra s'inspirer de l'exercice précédent) Déterminer toutes les fonctions numériques f de 2 variables réelles, différentiables sur $\mathbb{R}^2$, telles que $df = (-y^2 \exp(-xy) + 2)dx + (\exp(-xy) - xy \exp(-xy))dy$

Exercice 111 f est une fonction définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ dont la différentielle est

$$(6xy + 1)dx + a x^2 dy \quad a \text{ est un nombre réel}$$

Montrer que ce n'est possible que pour une seule valeur de a , à déterminer.

Exercice 112 Montrer qu'on ne peut pas trouver de fonction f définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$df = (y^2 - xy)dx + (2xy - 1)dy \quad \text{pour tout } (x, y) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

Exercice 113 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \exp(-xy) - x + 3y$

a) Déterminer la différentielle de f

b) Montrer qu'au voisinage (préciser ce que cela signifie) de $(1, 0)$, l'égalité $f(x, y) = 0$ permet de définir y comme fonction implicite de x , $y = y(x)$.

c) Déterminer $y'(1)$.

Exercice 114 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto g(x, y) = x \exp(-xy) + x + 3y - 2$$

a) Déterminer la différentielle de g

b) Montrer qu'au voisinage (préciser ce que cela signifie) de $(1, 0)$, l'égalité $g(x, y) = 0$ permet de définir y comme fonction implicite de x , $y = y(x)$.

c) Déterminer $y'(1)$.