

Corrigé du baccalauréat spécialité Jour 1

Métropole Antilles-Guyane 8 septembre 2022

Exercice 1 7 points

Thèmes : fonctions, suites

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}.$$

La courbe représentative de la fonction g admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

$$\text{On a pour tout réel } x, \quad g(x) = \frac{e^x \times 2}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{2}{1 + e^{-x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$. Réponse **b**.

2. La dérivée seconde f'' est positive sur les intervalles $] -\infty ; -1[$ et $[2 ; +\infty[$, donc la fonction f est convexe sur ces intervalles : réponse **c**.

3. On a pour tout naturel n :

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0,5a_n + 1 - 2 = 0,5a_n - 1 = 0,5(a_n - 2) = 0,5b_n.$$

l'égalité $b_{n+1} = 0,5b_n$ montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Réponse **d**.

4. • Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$;

• On a $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$.

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{n}{n+1} = 1.$$

• L'encadrement vrai pour tout naturel n , donne : $1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 1$.

Ce théorème des « gendarmes » montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. Réponse **b**.

5. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

Une primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$ est définie par :

$$\text{Si } F(x) = \frac{1}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right), \text{ alors } F'(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x} = x^2 \ln x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x = f(x). \text{ Réponse a.}$$

6. Pour tout réel x , l'expression $2 + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1}$ est égale à :

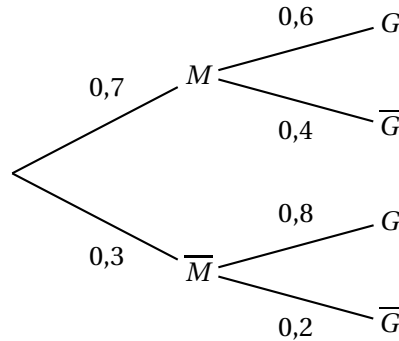
$$2 + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1} = \frac{2e^{-x} + 2 + 3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1} = \frac{5e^{-x} - 3}{e^{-x} + 1}; \text{ en multipliant chaque terme par } e^x, \text{ on obtient : } \frac{5 - 3e^x}{1 + e^x} : \text{ réponse a.}$$

Exercice 2 7 points

Thème probabilités

1. a. On a $p(M) = 0,7$, donc $p(\overline{M}) = 1 - 0,7 = 0,3$.
 Or $p(\overline{M} \cap \overline{G}) = 0,06 \iff p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(\overline{G})$, soit
 $0,06 = 0,3 \times p_{\overline{M}}(\overline{G}) \iff p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0,2$.

b.



- c. On calcule $p(\overline{M} \cap G) = p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(G) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.
 d. On a de même $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.
 D'après la loi des probabilités totales :
 $p(G) = p(M \cap G) + p(\overline{M} \cap G) = 0,42 + 0,24 = 0,66$.
2. On calcule $p_G(M) = \frac{p(G \cap M)}{p(G)} = \frac{p(M \cap G)}{p(G)} = \frac{0,42}{0,66} = \frac{42}{66} = \frac{21}{33} = \frac{7}{11} \approx 0,64 > 0,5$. L'affirmation est exacte.
3. a. On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

- b. D'après le tableau précédent :
 $E(T) = 17 \times 0,42 + 12 \times 0,28 + 5 \times 0,24 + 0 \times 0,06 = 7,14 + 3,36 + 1,2 = 11,7$.
 Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.
- c. Soit x le nombre minimum de visiteurs, x doit vérifier :
 $11,7 \times x > 700 \iff x > \frac{700}{11,7}$. Or $\frac{700}{11,7} \approx 59,8$.
 Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.
4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte ; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	12 + g	12	g	0

L'espérance devient :

$$E = 0,42(12+g) + 12 \times 0,28 + 0,24 \times g + 0 \times 0,06 = 5,04 + 0,42g + 3,36 + 0,24g = 8,4 + 0,66g.$$

Le responsable veut que :

$$8,4 + 0,66g = 15 \iff 0,66g = 6,6 \iff g = 10.$$

Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, chaque visiteur a donc en moyenne une probabilité de 0,66 de visiter la grotte.

La variable aléatoire G égale au nombre de visiteurs de la grotte suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,66)$.

Il faut donc trouver $p(G > 75)$. La calculatrice donne $P(G \leq 75) \approx 0,9797$, donc $P(G > 75) \approx 1 - 0,9797$ soit environ 0,0203, donc 0,020 au millième près.

Exercice 3 7 points

Thème fonctions logarithmes et exponentielles, suites

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de la fonction f au voisinage de plus l'infini.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

- a. En dérivant $f(x)$ comme un quotient, on obtient pour $x \geq 1$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

- b.

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

Comme quel que soit x , $x^2 \geq 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - \ln x$:

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff e > x : f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1; e]$;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff e < x : f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[e;] + \infty[$.
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff e = x$.

- c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

3. a. D'après le tableau de variations sur l'intervalle $[1; e]$, la fonction est strictement croissante de $-\infty$ à $\frac{1}{e}$: l'équation $f(k) = k$ avec $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$ a donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires une solution unique.
- b. D'après le tableau de variations $f(x) \leq \frac{1}{e}$ (maximum de f) : l'équation $f(x) = k$ avec $k > \frac{1}{e}$ n'a donc pas de solution

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}$: produit de deux facteurs supérieurs à zéro, cette dérivée est supérieure à zéro, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. • *initialisation* : $u_0 = 1$ et $u_1 = e^{u_0} = e^1 = e$.

On a bien : $u_0 \leq u_1 \leq 1$.

- *Hérédité*

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.

Par croissance de la fonction g :

$$g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(e) \text{ soit}$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq g(e)$$

Or $g(e) = e^{\frac{e}{4}} \approx 1,97$; donc $g(e) \leq e$ et l'encadrement précédent devient :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq e : \text{l'encadrement est vrai au rang } n+1.$$

L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il est vrai au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence :

quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.

3. L'encadrement précédent montre :

- que la suite (u_n) est croissante ;
- que la suite (u_n) est majorée par e

donc que la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \leq e$.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation :

$$e^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. Quel que soit $x > 0$, $e^{\frac{x}{4}} = x \Rightarrow \frac{x}{4} = \ln x$, par croissance de la fonction logarithme népérien.

Or $\frac{x}{4} = \ln x \iff \frac{1}{4} = \frac{\ln x}{x}$, soit finalement :

$$f(x) = \frac{1}{4} \text{ avec } f \text{ fonction définie dans la partie A.}$$

5. On a $\frac{1}{e} \approx 0,367$ et $\frac{1}{4} = 0,25$.

D'après la question 3. a. de la partie A l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ a donc une solution unique sur l'intervalle $[1; e]$.

La calculatrice donne : $f(1) = 0$ et $f(2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,346$;

$f(1,4) \approx 0,24$ et $f(1,5) \approx 0,27$, donc $1,4 < \ell < 1,5$;

$f(1,42) \approx 0,247$ et $f(1,43) \approx 0,251$, donc $1,42 < \ell < 1,43$;

$f(1,429) \approx 0,2498$ et $f(1,430) \approx 0,2501$, donc $1,429 < \ell < 1,430$;

Finalement $\ell \approx 1,43$ au centième près.

Exercice 4 7 points

Thème : géométrie dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1; -1; 3), \quad B(1; 1; 2), \quad C(1; -1; 7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1; 6; 8)$ et $E(11; -9; 2)$.

1. a. Avec $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix}$, on peut prendre comme vecteur directeur $\frac{1}{3} \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a $M(x; y; z) \in (DE) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{DM} = t \frac{1}{3} \overrightarrow{DE}$, soit

$$\begin{cases} x+1 = 4t \\ y-6 = -5t \\ z-8 = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = -1+4t \\ y = 6-5t \\ z = 8-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- b. Une équation de la droite Δ' ne doit pas comporter de termes constants, donc

par exemple : $M(x; y; z) \in \Delta' \iff \begin{cases} x = 4t \\ y = -5t \\ z = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$

- c. $F(1,36; -1,7; -0,7) \in \Delta' \iff \begin{cases} 1,36 = 4t \\ -1,7 = -5t \\ -0,7 = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$

Les deux premières équations donnent $t = 0,34$ et la dernière $t = 0,35$. Donc

$F \notin (\Delta)$.

2. a. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les trois points A, B et C définissent un plan.
- b. On a $\frac{1}{3} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 - 10 + 2 = 0$;
De même $\frac{1}{3} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 + 0 - 8 = 0$.
Donc $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC); il est normal à ce plan.
- c. D'après la question précédente on sait que :
 $M(x; y; z) \in (ABC) \iff 4x - 5y - 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$
Or $A(-1; -1; 3) \in (ABC) \iff 4 \times (-1) - 5 \times (-1) - 2 \times 3 + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$, soit $-5 + d = 0 \iff d = 5$.
Conclusion : $M(x; y; z) \in (ABC) \iff 4x - 5y - 2z + 5 = 0$.
3. a. $G(7; -4; 4) \in \Delta \iff \begin{cases} 7 &= -1 + 4t \\ -4 &= 6 - 5t \\ 4 &= 8 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
Ces trois équations ont pour solution $t = 2$, donc $G(7; -4; 4) \in \Delta$.
- b. Le point H appartient à la droite Δ et au plan (ABC). Donc ses coordonnées x, y, z vérifient le système :
$$\begin{cases} x &= -1 + 4t \\ y &= 6 - 5t \\ z &= 8 - 2t \\ 4x - 5y - 2z + 5 &= 0 \end{cases}$$
 avec $t \in \mathbb{R}$
En remplaçant x, y, z par leur valeur en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :
 $4(-1 + 4t) - 5(6 - 5t) - 2(8 - 2t) + 5 = 0 \iff -4 + 16t - 30 + 25t - 16 + 4t + 5 = 0 \iff 45t - 45 = 0 \iff 45t = 45 \iff t = 1$.
Les coordonnées de H sont donc $(-1 + 4; 6 - 5; 8 - 2)$ soit $H(3; 1; 6)$.
- c. La distance du point G au plan (ABC) est donc égale à GH.
Or $GH^2 = (3 - 7)^2 + (1 + 4)^2 + (6 - 4)^2 = 16 + 25 + 4 = 45$, d'où $GH = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.
4. a. D'après la question 2. a., on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + 2 \times 0 + 4 \times (-1) = 4 - 4 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en A.
- b. En prenant comme base le triangle ABC, la hauteur correspondante est $[\text{fl} \hat{=}]$, donc :
 $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times GH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AC \times GH$.
On a $AB^2 = 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 4 + 4 + 1 = 9$, donc $AB = 3$;
 $AC^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$, donc $AC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$.
Donc $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 15$.