

🌀 Corrigé du baccalauréat Asie 17 mai 2022 Jour 1 🌀

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20 points).

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1

7 points

Principaux domaines abordés : Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace. Orthogonalité et distances dans l'espace. Représentations paramétriques et équations cartésiennes.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points

$A(-3; 1; 3), B(2; 2; 3), C(1; 7; -1), D(-4; 6; -1)$ et $K(-3; 14; 14)$.

1.
 - a. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.
 - b. D'après la question précédente, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.
De plus le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \times (-1) + 1 \times 5 + 0 \times (-4) = 0$.
Le parallélogramme ABCD ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires est un rectangle.
c. On a $AB^2 = 25 + 1 = 26$, d'où $AB = \sqrt{26}$;
de même $AD^2 = 1 + 25 + 16 = 42$, d'où $AD = \sqrt{42}$.
L'aire du rectangle ABCD est égale à
 $AB \times AD = \sqrt{26} \times \sqrt{42} = \sqrt{26 \times 42} = \sqrt{2 \times 13 \times 2 \times 21} = 2\sqrt{13 \times 21} = 2\sqrt{273}$.
2.
 - a. D'après la question 1., les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et D ne sont pas alignés : ils définissent donc bien un plan.
 - b. Soit le vecteur $\vec{n}(-2; 10; 13)$.
 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -10 + 10 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 + 50 - 52 = 0$.
Conclusion : le vecteur $\vec{n}$, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), est normal à ce plan.
 - c. Le résultat précédent montre que le plan (ABD) a une équation de la forme
 $-2x + 10y + 13z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Or par exemple $B(2; 2; 3) \in (ABD)$ donc
 $-2 \times 2 + 10 \times 2 + 13 \times 3 = d \iff -4 + 20 + 39 = d \iff d = 55$.
Donc le plan (ABD) a pour équation $-2x + 10y + 13z = 55$.
3.
 - a. Si Δ est orthogonale au plan (ABD) elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$.
Comme elle contient K, on a donc :
 $M(x, y; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{KM} = t\vec{n}, t \in \mathbb{R}$.

Avec $\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} x - (-3) \\ y - 14 \\ z - 14 \end{pmatrix}$ ceci se traduit par le système :

$$\begin{cases} x + 3 = -2t \\ y - 14 = 10t \\ z - 14 = 13t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = -2t - 3 \\ y = 10t + 14 \\ z = 13t + 14 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- b.** Si I est le projeté orthogonal de K sur le plan (ABD), le point I est un point de Δ ; comme c'est aussi un point de (ABD); ses coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} x = -2t - 3 \\ y = 10t + 14 \\ z = 13t + 14 \\ -2x + 10y + 13z = 55 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant dans la dernière équation x , y et z par leurs expressions en fonction de t , on obtient :

$$-2(-2t - 3) + 10(10t + 14) + 13(13t + 14) = 55$$

$$\iff 4t + 6 + 100t + 140 + 169t + 182 = 55 \iff 273t = -273 \iff t = -1.$$

Les premières équations donnent alors

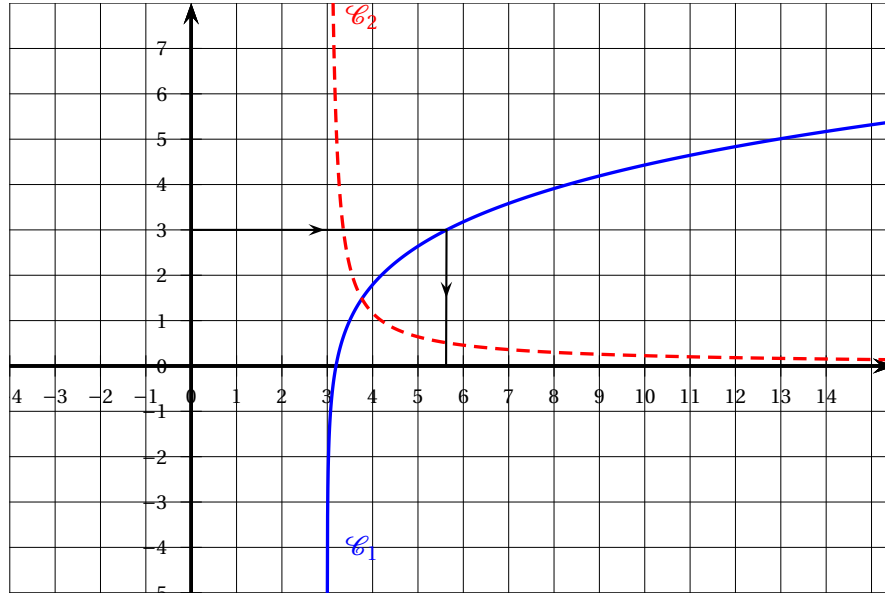
$$x = 2 - 3 = -1, \quad y = -10 + 14 = 4 \text{ et } z = -13 + 14 = 1.$$

Le point I a donc pour coordonnées $(-1; 4; 1)$.

- c.** ABCD étant un rectangle le point D appartient au plan (ABD). Donc la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD est [KI].

$$\overrightarrow{KI} \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix} \text{ donne } KI^2 = 4 + 100 + 169 = 273 \text{ et enfin } KI = \sqrt{273}.$$

$$4. \text{ On a } V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{ABCD}) \times KI = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{273} \times \sqrt{273} = \frac{2 \times 273}{3} = \frac{2 \times 3 \times 91}{3} = 182.$$

EXERCICE 2**7 points***Principaux domaines abordés : Étude des fonctions. Fonction logarithme.***Partie A**

Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f' , toutes deux définies sur $]3; +\infty[$.

1. Si $\mathcal{C}_1$ était la représentation de la dérivée, celle-ci serait négative puis positive, donc la fonction serait décroissante puis croissante ce qui n'est pas le cas de la fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}_2$.

Donc $\mathcal{C}_2$ est la représentation de la fonction dérivée et $\mathcal{C}_1$ celle de la fonction.

2. On lit approximativement $f(5,6) \approx 3$.
3. f semble concave sur $]3; +\infty[$.

Partie B

1. • $x^2 - x - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 = (x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2})(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}) = (x + 2)(x - 3)$.

On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $[-2; 3]$. Donc $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie sur $I =]3; +\infty[$;

- On peut calculer $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$ et en déduire les racines du trinôme $x^2 - x - 6$: $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$ et faire ensuite la même conclusion.

2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I .

- Limite en $+\infty$: $\ln(x^2 - x - 6) = \ln x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} = 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, par composition de la fonction logarithme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• Limite en 3 : $f(x) = \ln(x+2)(x-3)$.

On a $\lim_{x \rightarrow +3} (x+2)(x-3) = 5 \times 0 = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +3} \ln(x+2)(x-3) = -\infty$. Ceci signifie que la droite verticale d'équation $x = 3$ est asymptote à courbe représentative de la fonction f sur I (soit $\mathcal{C}_1$)

3. a. Sur I , on a vu que $x^2 - x - 6 > 0$, donc la fonction f est dérivable et sur I , on a
$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}.$$

b. $f'(x)$ a le signe du numérateur $2x-1$:

pour $x > 3$, on a $2x-1 > 5$ donc $2x-1 > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur I de moins l'infini à plus l'infini.

On dresse le tableau des variations de la fonction f .

x	3	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. a. La fonction f est strictement croissante sur I et en particulier sur $]5; 6[$.

De plus $f(5) = \ln(25 - 5 - 6) = \ln 14 \approx 2,64 < 3$ et $f(6) = \ln(36 - 6 - 6) = \ln 24 \approx 3,18 > 3$.

La fonction f étant continue car dérivable sur l'intervalle $]5; 6[$, d'après la propriété des valeurs intermédiaires il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 3$, avec $5 < \alpha < 6$.

b. La calculatrice donne :

$f(5,6) \approx 2,984$ et $f(5,7) \approx 3,035$, donc $5,6 < \alpha < 5,7$ puis

$f(5,63) \approx 2,999$ et $f(5,64) \approx 3,004$ donc $5,63 < \alpha < 5,64$.

5. a. La fonction f' quotient de fonctions dérivables sur I , le dénominateur ne s'annulant pas est elle-même dérivable sur I et sur cet intervalle :

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - x - 6) - (2x-1)(2x-1)}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 - 1 - 4x}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}.$$

b. Le signe de la dérivée seconde est celui du numérateur puisque $(x^2 - x - 6)^2 > 0$.

Or ce trinôme $-2x^2 + 2x - 13$ n'a pas de racine ($\Delta = 4 - 8 \times 13 = -100 < 0$), donc est négatif en particulier sur I .

Sur I , $f''(x) < 0$: la fonction est concave sur cet intervalle.

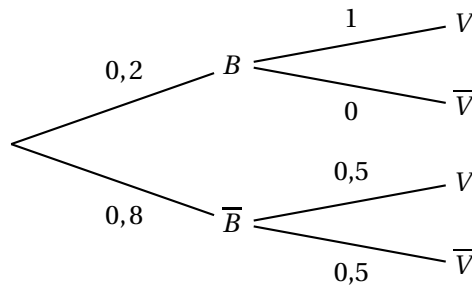
EXERCICE 3**7 points**

Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

1. S'il a pris le bus il est à l'heure pour son vol, donc $P_B(V) = 1$.
2. On représente la situation par un arbre pondéré.



3. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(V) = P(B \cap V) + P(\overline{B} \cap V) = 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 = 0,2 + 0,4 = 0,6.$$

4. On calcule $P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$.

Partie 2

1. La présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres et chaque passager a la même probabilité 0,95 d'être présent, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0,95$.
2. On a $E = n \times p = 206 \times 0,95 = 196,3 \approx 196$. En moyenne sur 206 titulaires d'un billet à peu près 196 vont se présenter.
3. On a $P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^5 \approx 0,03063$, soit 0,031 au millième près.
4. La calculatrice donne $P(X \leq 200) \approx 0,9477$, soit 0,948 au millième près.
Il est donc à peu près certain que l'avion sera au mieux juste rempli.
5. On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	0,000 03
c_i	51 500	50 650	49 800	48 950	48 100	47 250	46 400

- a. En complétant à 1 la somme des probabilités données dans le tableau on trouve :
 $P(Y = 6) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + \dots + P(Y = 5)) = 0,000 03$.
- b. La compagnie a encaissé $206 \times 250 = 51 500$ € et elle devra rembourser 850 € à chaque client ne pouvant embarquer, donc $C = 51 500 - 850Y$

c. Voir le tableau ci-dessus.

On a $E(C) = 51\,500 \times 0,94775 + \dots 46\,400 \times 0,00003 \approx 51\,429,2$, soit 51 429 € à l'euro près

d. En vendant exactement 200 billets, la compagnie fera un chiffre d'affaires de 200×250 soit 50 000 euros.

En pratiquant le surbooking, la compagnie peut espérer un chiffre d'affaires de 51 429 euros.

EXERCICE 4

7 points

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Dans cet exercice, on modélise le développement d'une bactérie avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles. Pour tout entier naturel n , on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :

$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

- a. • $p_1 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,3 + 0,063 = 0,363$;
 • $p_2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,131\,769 = 0,3 + 0,092\,2383 = 0,392\,2383$.

b. La probabilité d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type est égale à $1 - p_{10} = 1 - 0,42802018 = 0,57117182 \approx 0,571$ au millièème près.

c. D'après le tableau la suite (p_n) semble être croissante et semble aussi avoir une limite puisque les quatre derniers résultats commencent par 0,4285...

2. a. On veut démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

Initialisation : On a $0 \leq 0,3 \leq 0,363 \leq 0,5$, soit $0 \leq p_0 \leq p_1 \leq 0,5$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

Si ces nombres positifs sont rangés dans cet ordre, leurs carrés aussi, soit

$0 \leq p_n^2 \leq p_{n+1}^2 \leq 0,5^2$, puis en multipliant par 0,7 :

$0 \leq 0,7 \times p_n^2 \leq 0,7 \times p_{n+1}^2 \leq 0,7 \times 0,5^2$ et enfin en ajoutant à chaque membre 0,3 :

$0,3 \leq 0,3 + 0,7 \times p_n^2 \leq 0,3 + 0,7 \times p_{n+1}^2 \leq 0,3 + 0,7 \times 0,5^2$, soit

$0,3 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,475$. On peut donc écrire :

$0 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,5$: la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est encore vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$

b. Le résultat précédent montre que la suite (p_n) est croissante et majorée par 0,5 : elle est donc convergente vers une limite L telle que $L \leq 0,5$.

3. a. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1} = L$, la relation de récurrence donne :

$$L = 0,3 + 0,7L^2 \iff 0,7L^2 - L + 0,3 = 0$$

L est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

- b. On a $\Delta = 1 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16 = 0,4^2 > 0$. Il y a donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{1+0,4}{2 \times 0,7} = 1, \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1-0,4}{2 \times 0,7} = \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0,43$$

On ne peut retenir la solution L_1 puisque (p_n) est majorée par 0,5. Il reste donc

$$L_2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{7}.$$

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n) .

On complète, les lignes 2, 4 et 5 de cette fonction de façon à ce que la fonction `suite(n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```
1 def suite(n) :  
2     p = 0.3  
3     s = [p]  
4     for i in range (n - 1)  
5         p = 0.3+0.7*p*p  
6         s.append(p)  
7     return (s)
```