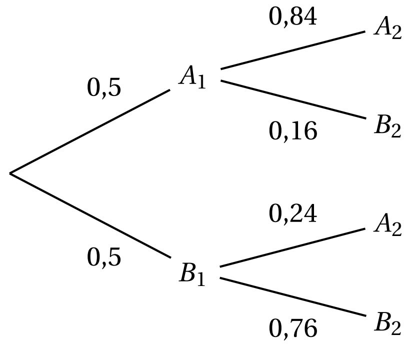
∽ Corrigé Baccalauréat Amérique du Nord Jour 2 19 mai 2022 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : probabilités, suites**

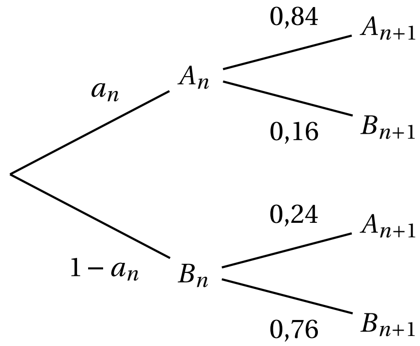
1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. **a.** Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $a_2 = p(A_2)$:
$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)$
$= 0,84 \times 0,5 + 0,24 \times 0,5 = 0,54$. Donc $a_2 = 0,54$.

b. Utilisons la formule de Bayes pour calculer $p_{A_2}(B_1)$:
$p_{A_2}(B_1) = \dfrac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \dfrac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \dfrac{0,24 \times 0,5}{0,54} \approx 0,222$

3. **a.** On remarquera au préalable que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 1$.
L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, pour tout entier naturel non nul :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n)$
$= 0,84 \times p(A_n) + 0,24 \times p(B_n) = 0,84\ a_n + 0,24\ b_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - a_n$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0,84\ a_n + 0,24(1 - a_n) = 0,6\ a_n + 0,24$

c. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
Initialisation : $a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1} = 0,6 - 0,1 = 0,5$. L'initialisation est vérifiée.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
Montrons que $a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$.
D'après la question précédente,$a_{n+1} = 0,6\ a_n + 0,24$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$a_{n+1} = 0,6\left(0,6-0,1\times 0,6^{n-1}\right)+0,24 = 0,36-0,1\times 0,6\times 0,6^{n-1}+0,24 = 0,6-0,1\times 0,6^{n}$. On obtient ce qu'il fallait démontrer. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6-0,1\times 0,6^{n-1}$.

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,6^{n-1} = 0$ car $0,6 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,6$.
Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

e. Résolvons : $a_n \geqslant 0,599$. $a_n \geqslant 0,599 \iff 0,6-0,1\times 0,6^{n-1} \geqslant 0,599$
$\iff -0,1\times 0,6^{n-1} \geqslant -0,001 \iff 0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{-0,001}{-0,1} \iff 0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100}$.
Sachant que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
$0,6^{n-1} \leqslant \dfrac{1}{100} \iff \ln\left(0,6^{n-1}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{100}\right) \iff (n-1)\times\ln(0,6) \leqslant -\ln(100)$. Or $\ln(0,6) < 0$,
donc $n-1 \geqslant \dfrac{-\ln(100)}{\ln(0,6)} \iff n \geqslant 1-\dfrac{2\ln(10)}{\ln(0,6)}$.
À la calculatrice, $1-\dfrac{2\ln(10)}{\ln(0,6)} \approx 10,02$ donc $n \geqslant 11$.
La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à 0,599 à partir du 11-ième jour.

EXERCICE 2 (7 points) **Thèmes : fonctions, fonction exponentielle**

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$.

   $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $p'(x) = 3x^2-6x+5$

   Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $p'(x) > 0$. Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

   La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$ à valeurs dans $[-68\ ;\ 37]$. Or $0 \in [-68\ ;\ 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

4. D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\ ;\ 4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$ (car $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $1+x^2 \neq 0$).
$\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\times(1+x^2)-\mathrm{e}^x\times 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+1)}{(1+^2)^2} = \dfrac{(x-1)^2\,\mathrm{e}^x}{(1+^2)^2}$.

b. $f'(x) = 0 \iff \dfrac{(x-1)^2\,\mathrm{e}^x}{(1+^2)^2} = 0 \iff (x-1)^2\,\mathrm{e}^x \iff (x-1)^2 \iff x-1=0 \iff x=1.$

Et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

2. a. Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3\,;\,0]$;
- concave sur $[0\,;\,1]$;
- convexe sur $[1\,;\,4]$.

Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b. $\forall x \in [-3\,;\,4] : f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\,;\,4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $\left(1+x^2\right)^3 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

EXERCICE 3 (7 POINTS) **THÈMES : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE**

En utilisant le repère fourni $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, les points notés ont pour coordonnées : A$(6\,;\,0\,;\,2)$, B$(6\,;\,0\,;\,0)$, C$(6\,;\,8\,;\,0)$, D$(0\,;\,8\,;\,0)$, E$(0\,;\,0\,;\,4)$, F$(6\,;\,0\,;\,4)$, G$(6\,;\,8\,;\,4)$, H$(0\,;\,8\,;\,4)$, $(6\,;\,0\,;\,2)$, R$(6\,;\,3\,;\,4)$, T$(3\,;\,0\,;\,4)$ et S$\left(3\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$.

$AR = \|\overrightarrow{AR}\| = \sqrt{0^2+3^2+2^2} = \sqrt{13}$ et $AT = \|\overrightarrow{AT}\| = \sqrt{(-3)^2+0^2+2^2} = \sqrt{13}$

$\|\overrightarrow{AR}\| = \|\overrightarrow{AR}\|$ donc le triangle ART est isocèle en A.

b. $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR} = 0\times(-3)+3\times0+2\times2 = 4$

c. Utilisons la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR} = \left\|\overrightarrow{AR}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AT}\right\| \times \cos\left(\widehat{\mathrm{RAT}}\right)$

donc $\cos\left(\widehat{\mathrm{RAT}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AR}}{\|\overrightarrow{AR}\|\times\|\overrightarrow{AT}\|} = \dfrac{4}{\sqrt{13}^2} = \dfrac{4}{13}$ donc $\widehat{\mathrm{RAT}} = \arccos\left(\dfrac{4}{13}\right) \approx 72,1°$

2. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{JK} = k\times\overrightarrow{JL}$.

En effet le système $\begin{cases} 0 &= k\times(-3)\\ 3 &= k\times 0\\ 2 &= k\times 2\end{cases}$ n'admet pas de solution. Donc ils définissent une base du plan (ART). Calculons :

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AR} = 2\times 0+(-2)\times 3+3\times 2 = -6+6 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AT} = 2\times(-3)+(-2)\times 0+3\times 2 = -6+6 = 0$.

Donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AT}$ donc $\overrightarrow{n}$ est normal à tout vecteur du plan (ART), donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ART).

b. Le plan (ART) a pour équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$, où $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$, on obtient : (ART) : $2x-2y+3z+d=0$.

Or $A \in$ (ART) donc $12-0+6+d=0$ donc $d=-18$.

Donc (ART) a pour équation $2x-2y+3z-18=0$.

3. a. La droite Δ est orthogonale au plan (ART), donc elle admet comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$, vecteur normal à ce plan. Elle passe par le point $S\left(3\ ;\ \dfrac{5}{2}\ ;\ 0\right)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$\begin{cases} x &= 3+2k\\ y &= \dfrac{5}{2}-2k\\ z &= 0+3k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$ soit $\begin{cases} x &= 3+2k\\ y &= \dfrac{5}{2}-2k\\ z &= 3k\end{cases}$, avec $k\in\mathbb{R}$.

b. Les coordonnées du point L sont les uniques solutions du système :

$(S)\begin{cases} x=3+2k\\ y=\dfrac{5}{2}-2k\\ z=3k\\ 2x-2y+3z-18=0\end{cases}$ En remplaçant x, y et z dans la dernière équation, on obtient :

$2x-2y+3z-18=0 \iff 2(3+2k)-2\left(\dfrac{5}{2}-2k\right)+3\times 3k-18=0 \iff 17k-17=0 \iff k=1$

Donc $x=3+2k=5$, $y=\dfrac{5}{2}-2k=\dfrac{1}{2}$ et $z=3k=3$. Le point L a pour coordonnées $\left(5\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 3\right)$.

4. Le milieu K de [EH] a donc pour coordonnées $(0\ ;\ 4\ ;\ 4)$. N a pour coordonnées $(0\ ;\ 8-4t\ ;\ 4t)$.

Pour $t\in[0\ ;\ 1]$, les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ND}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}0\\-4\text{t}\\4\text{t}\end{pmatrix}$.

On remarque alors que $\overrightarrow{DN} = t\times\overrightarrow{DK}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires, donc les points D, K et N sont alignés.

Pour vérifier que N est un point du segment [DK], montrons que $\overrightarrow{NK}.\overrightarrow{ND} \leqslant 0$:

$\overrightarrow{NK}\begin{pmatrix}0\\-4+4\text{t}\\4-4\text{t}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ND}\begin{pmatrix}0\\4\text{t}\\-4\text{t}\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{NK}.\overrightarrow{ND} = 0\times 0+(-4+4t)\times 4t+(4-4t)\times(-4t) = 32t^2-32t = 32t(t-1)$.

$t\in[0\ ;\ 1]$ donc $32t(t-1)\leqslant 0$ donc N est un point du segment [DK].

5. Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix}-3\\\dfrac{11}{2}-4t\\4t\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN}=0$.

$\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN}=0 \iff 2\times(-3)+(-2)\times\left(\dfrac{11}{2}-4t\right)+3\times 4t=0 \iff 20t-17=0 \iff t=\dfrac{17}{20}$. Le point N aura alors pour coordonnées : $\text{N}\left(0\,;\,8-4\times\dfrac{17}{20}\,;\,4\times\dfrac{17}{20}\right)$ soit $\text{N}\left(0\,;\,\dfrac{23}{5}\,;\,\dfrac{17}{5}\right)$

EXERCICE 4 (7 points) **Thème : fonction logarithme népérien, probabilités**

1. $a=\ln(9)+\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)=\ln\left(3^2\right)+\ln\left(\sqrt{3}\right)-\ln(3)-\ln\left(3^2\right)=1\dfrac{1}{2}\ln(3)-\ln(3)=-\dfrac{1}{2}\ln(3)$

Réponse d

2. Donnons en premier le domaine de définition. Il faut que $x>0$ et $x>10$. Donc $\mathcal{D}_f=]10\,;\,+\infty[$.

Dans $\mathcal{D}_f$, $\ln(x)+\ln(x-10)=\ln(3)+\ln(7) \iff \ln(x(x-10))=\ln(3\times 7) \iff x(x-10)=21$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ou

$x^2-10x-21=0$. $\Delta=184>0$, donc ce trinôme admet deux solutions. Or $\sqrt{\Delta}=\sqrt{184}=\sqrt{4\times 46}=2\sqrt{46}$.

Les deux solution sont : $x_1=\dfrac{10-2\sqrt{46}}{2}=5-\sqrt{46}$ et $x_2=\dfrac{10+2\sqrt{46}}{2}=5+\sqrt{46}$.

Or $5^2=25<46$, donc $5<\sqrt{46} \iff 5-\sqrt{46}<0$ et $5-\sqrt{46}\notin\mathcal{D}_f$.

Par contre $\sqrt{46}>5 \Rightarrow 5+\sqrt{46}>5+5=10$, donc $x_2\in\mathcal{D}_f$.

La seule solution réelle est donc $5+\sqrt{46}$. **Réponse c**.

3. La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par l'expression $f(x)=x^2(-1+\ln(x))$. Elle est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

$\forall x\in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=2x\times(-1+\ln(x))+x^2\times\dfrac{1}{x}=-2x+2x\ln(x)+x=-x+2x\ln(x)=x(2\ln(x)-1)$.

$f'(x)=0 \iff x(2\ln(x)-1)=0 \iff 2\ln(x)-1 \iff \ln(x)=\dfrac{1}{2} \iff x=\text{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\text{e}}$. La tangente au point d'abscisse $a=\sqrt{\text{e}}$ est horizontale. Son équation est donnée par : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Sachant que $f'\left(\sqrt{\text{e}}\right)=0$ et que $f\left(\sqrt{\text{e}}\right)=\sqrt{\text{e}}^2\left(-1+\ln(\sqrt{\text{e}})\right)=\text{e}\left(-1+\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\text{e}$. L'équation de cette tangente horizontale est donc : $y=-\dfrac{1}{2}\text{e}$.

Réponse d

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.

Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 5 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. Si on note par X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés, alors X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}$: $X\sim\mathcal{B}\left(5\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$

Ainsi $p(X=2)=\dbinom{5}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^{5-2}=0{,}3456\approx 0{,}346$.

Réponse b

5. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. X est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$: $X \sim \mathscr{B}\left(5\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$.

   $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^5 \approx 0,922$.

Réponse d

6. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. X est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$: $X \sim \mathscr{B}\left(5\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$.

   L'espérance d'une loi binomiale est égale à : $E(X) = np$.

   Ici, $E(x) = 5 \times \dfrac{2}{5} = 2$.

Réponse c