

Suites - Exercices de TD

Exercices sur la récurrence

Exercice 1

Montrer par récurrence que :

1. pour tout n entier supérieur à 1 et tout q réel différent de 1,

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

2. $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout x réel positif. Avez vous une autre démonstration à suggérer?
3. pour tout n entier supérieur à 1:

$$\sum_{k=1}^n k2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

4. pour tout $n > 1$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

Indication: Montrer que pour tout $n > 0$ on a: $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < 0$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. On désigne par $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f

$$[f^{(1)} = f'; f^{(2)} = f''; \dots; f^{(n+1)} = (f^{(n)})'].$$

Montrer que $f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}$.

Exercice 3

Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

Calculer u_1 et u_2 , puis montrer que pour tout n $u_n = \frac{n+1}{n+2}$.

Calculs d'intérêts

Exercice 4 Vous placez 5000 euros à un taux annuel de 6% pendant 2 ans et 3 mois. De quel capital disposez vous en fin de placement ?

Exercice 5 Un investisseur a placé une certaine somme à intérêts composés pour une longue période. On dispose des renseignements suivants sur ce placement :

le montant de la valeur acquise au bout de la 7ème année s'élève à 177 014.22 euros,

le montant de la valeur acquise au bout de la 10ème année s'élève à 226 098.34 euros,

le montant des intérêts capitalisés à l'expiration de la durée du placement se monte à 239 974.29 euros.

1. Retrouver le taux d'intérêt.
2. Retrouver le capital investi.
3. Déterminer la durée totale du placement.

Exercice 6

Un industriel se propose d'acquérir une machine. Il consulte trois fournisseurs qui lui font chacun une offre.

. Le fournisseur A propose une machine pour 50 000 euros comptant.

. Le fournisseur B propose une machine payable en quatre fois :

10 000 euros comptant, 20 000 euros après un an, 20 000 après 2 ans et 10 000 après 3 ans

. Le fournisseur C propose une machine payable en six fois :

rien au comptant, 10 000 euros après un an, 10 000 euros après 2 ans, 10 000 euros après 3 ans,

15 000 euros après 4 ans, 15 000 euros après 5 ans, 10 000 euros après 6 ans.

Sachant que les trois machines sont équivalentes pour l'industriel, et que le taux d'actualisation sur le marché financier est 10.75% l'an, déterminer quelle est l'offre la plus intéressante.

Exercice 7

Un appartement est évalué à 160 000 euros. Le propriétaire en propose l'achat aux conditions suivantes : 50 000 euros comptant plus 18 mensualités de 6 500 euros, la première ayant lieu le 15/04/2005 soit 3 mois plus tard, et la dernière le 15/10/2006. Sachant que le taux d'actualisation est de 9% l'an, est-ce une opération intéressante?

Exercice 8

1. Quel est le montant de l'annuité constante à s'acquitter si au taux de 10% par an, on a obtenu pour l'achat d'un bien de 100 000 euros, le règlement par 10 annuités constantes, la première payable immédiatement.
2. Si l'annuité est égale à 19 564. 08 euros et si le taux est égal à 12%, combien d'annuités faut-il régler ?

Révisions sur les limites**Exercice 9**

Etudier la convergence des suites ci-dessous définies par leur terme général:

$$\frac{3n^4+1}{-2n^2+5n+3} \quad ; \quad \sqrt{4n^2+n}-2n \quad ; \quad \frac{[\ln(n)]^2}{\sqrt{n+1}} \quad ; \quad \frac{n^4}{e^n} \quad ; \quad n[\ln(n+1)-\ln(n)]$$

$$\text{Rappel: } \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n} + u^n \varepsilon(u).$$