

Licence économie gestion 1ère année. 2022 2023. Mathématiques 1.

Série d'exercices de TD n° 3.

Limite. Définition.

Exercice 115 - Rappeler la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, puis prouver qu'il **existe** un nombre $a > 0$ (on ne demande pas de trouver la valeur de a) tel que

pour tout x de $]0, a[$ $0,98x \leq \ln(1+x) \leq 1,02x$

Exercice 116 - Rappeler la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$, puis prouver qu'il existe un nombre $a > 0$ (on ne demande pas de calculer sa valeur) tel que pour tout x de $]a, +\infty[$ $\ln(x) \leq 0,10x$

Exercice 117 a) Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, $3x \leq \ln(1 + \exp(3x)) \leq 3x + \ln 2$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \exp(3x))}{x} = 3$

Exercice 118 Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $-e^{-x} \leq e^{-x} \cos x \leq e^{-x}$. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} \cos(x))$

Exercice 119 Calculer les limites suivantes et conclure :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

Exercice 120 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2a}{x-1} \text{ si } x > 2 \\ f(x) = -x + 3 \text{ si } x < 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$$
, a désigne un nombre réel.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; f a-t-elle une limite en 2 ? Pour quelle valeur de a f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Construire $C(f)$, représentation graphique de f .

Exercice 121 Soit f la fonction définie sur l'ensemble D_f par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{4x+1} \text{ si } x > 2 \\ f(x) = x^2 - 1 \text{ si } x \leq 2 \end{cases}$$

Préciser l'ensemble de définition de f , D_f ,

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

f a-t-elle une limite en 2 ? Construire la représentation graphique de f . Peut-on construire un prolongement de f par continuité en 2 ?

Exercice 122 Calculer les limites suivantes : (on pourra introduire la quantité $h = x-2$)

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{4-x^2}}$$

Comparaison d'infiniment petits, d'infiniment grands.

Exercice 123 a) Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp[\exp(x)]$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln(x))$

b) A l'aide d'une calculatrice, évaluer autant que possible $\exp(x)$, $\exp(\exp(x))$, $\ln(x)$, $\ln(\ln(x))$ pour les valeurs suivantes de x : 2, 10, 10000, 10^9 , 10^{15} , 10^{20} , le budget de l'Etat Français en Euros, la population mondiale, le nombre de cacahuètes produites dans le monde entier (en prenant 2, 5 g pour poids moyen d'une cacahuète)

c) Qu'en déduire en ce qui concerne l'utilisation des résultats de a) pour l'économie ou la gestion ?

Exercice 124 Préciser les ensembles de définition, chercher les limites et des équivalents simples des fonctions suivantes au voisinage des points indiqués.

$$1^\circ) f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3} \text{ en } 0; \text{ puis } 3; +\infty, -\infty$$

$$2^\circ) g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} \text{ en } 1; -1; +\infty; -\infty$$

$$3^\circ) h(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x-1}} \text{ en } +\infty \text{ et en } 1$$

Exercice 125 soit la fonction g définie par : pour tout x de $]0; +\infty[$, $g(x) = x \frac{e^x - (\ln x)^3 - x^2}{1 + 2x}$

Etudier la limite éventuelle de g en 0, puis la limite éventuelle de g en $+\infty$.

Exercice 126 Déterminer si les infiniment petits ou grands suivants sont du même ordre ou non. Si non, les comparer.

$$1^\circ) f(x) = 2x + x^3 + 1 \text{ et } g(x) = 10x + 5x^2 + 4, \text{ pour } x \text{ tendant vers } +\infty.$$

$$2^\circ) f(x) = 3x^3 + 4x + 1 \text{ et } g(x) = 2x^3 + x e^{2x} + 1, \text{ pour } x \text{ tendant vers } +\infty.$$

$$3^\circ) f(x) = \frac{x+3}{x+2} \text{ et } g(x) = 9 - x^2 \text{ pour } x \text{ tendant vers } -3.$$

$$4^\circ) f(x) = \ln(x+2) \text{ et } g(x) = \frac{2}{x} + 2 \text{ pour } x \text{ tendant vers } -1.$$

$$5^\circ) f(x) = x \sin(3x) \text{ et } g(x) = x^3 \sqrt{x+1} \text{ pour } x \text{ tendant vers } 0.$$

$$6^\circ) f(x) = \frac{1}{x^3} \text{ et } g(x) = 3(\exp(-x+1))^2 \text{ pour } x \text{ tendant vers } +\infty.$$

Exercice 127 Indiquer les ensembles de définition et déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes:

$$1^\circ) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} \quad 2^\circ) g(x) = \frac{(x+1)^2}{2x - x^2} \quad 3^\circ) h(x) = x e^{-1/x}$$

$$4^\circ) k(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \quad 5^\circ) j(x) = x - \sqrt{x} \quad 6^\circ) m(x) = \sqrt{2x + 5} \quad 7^\circ) n(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Exercice 128 1) On cherche à prouver l'existence de $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{x} \right)$ et à calculer cette limite.

1ère méthode. On définit la fonction numérique g sur $] -1 ; +\infty[$ par : $x \in] -1 ; +\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$.

Calculer g(0), en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x}$ à l'aide d'une dérivation.

Conclure : en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{x} \right)$

2nde méthode. Montrer que pour tout x de $] -1, +\infty[$ $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 = \frac{-x}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$

En déduire la limite cherchée

2°) prouver que $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x}{2}$

3°) Quelle valeur approximative cela indique-t-il pour $1/\sqrt{1,00028}$? Présentée seule, cette valeur approximative n'est pourtant pas exploitable, pourquoi?

Exercice 129 Préciser les ensembles de définition, chercher les limites et des équivalents simples des fonctions suivantes au voisinage des points indiqués.

$$1^\circ) f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3} \text{ en } 0; \text{ puis } 3; \quad +\infty, \quad -\infty$$

$$2^\circ) g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} \text{ en } 1; -1; \quad +\infty; \quad -\infty$$

$$3^\circ) h(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x-1}} \text{ en } +\infty \text{ et en } 1$$

Exercice 130 soit la fonction g définie par : pour tout x de $]0; +\infty[$, $g(x) = x \frac{e^x - (\ln x)^3 - x^2}{1 + 2x}$

Etudier la limite éventuelle de g en 0, puis la limite éventuelle de g en $+\infty$.

Exercice 131 Cet exercice est une préparation à l'utilisation des développements limités

g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont on sait uniquement que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^2 g(x)$

Soit r définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°) Etudier $\lim_{x \rightarrow 0} r(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x) - r(0)}{x}$;

2°) r est-elle continue en 0 ? r est-elle dérivable en 0 ?

3°) On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$, $u(x) = x + x^2$. Montrer que $f(u(x)) = 1 + 2x - x^2 + x^2 h(x)$, où $h(x)$ est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$

Exercice 132 g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont on sait uniquement que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

soit f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto f_2(x) = 3x - x^2 + x^2 g(x)$

Soit r_2 définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R} \mapsto r_2(x) = \begin{cases} \frac{f_2(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°) Etudier $\lim_{x \rightarrow 0} r_2(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_2(x) - r_2(0)}{x}$;

2°) r_2 est-elle continue en 0 ? r_2 est-elle dérivable en 0 ?

3°) On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$, $v(x) = 2x - x^2$

Montrer que $f_2(v(x)) = 6x - 7x^2 + x^2 j(x)$, où $j(x)$ est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} j(x) = 0$

Exercice 133

1) Trouver un contre-exemple qui prouve que $f_1 \sim g_1$ au voisinage de 0 et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de 0 n'implique pas forcément que $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

2) Chercher la limite en 0 et un équivalent simple de $\ln(2+x)$ et de $\sqrt{x+1} - x$

3) Définissons la fonction h sur $] -2 ; +\infty [$ par :

$$x \in] -2 ; +\infty [\mapsto h(x) = \ln(2+x).$$

Que vaut $h(0)$? Que vaut $h'(0)$?

En déduire la valeur de la limite suivante $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) - \ln 2}{x}$.

4) trouver un équivalent simple en 0 de $\ln(2+x) - \ln 2$

5) En vous inspirant des questions précédentes, et en introduisant la fonction w :

$$x \in]-2 ; +\infty[\mapsto w(x) = \sqrt{x+1} - x, \text{ évaluer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - x - 1}{x}$$

Exercice 134 Indiquer les ensembles de définition et déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes:

$$1^\circ) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} \quad 2^\circ) g(x) = \frac{(x+1)^2}{2x - x^2} \quad 3^\circ) h(x) = x e^{-1/x}$$

$$4^\circ) k(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \quad 5^\circ) j(x) = x - \sqrt{x} \quad 6^\circ) m(x) = \sqrt{2x + 5} \quad 7^\circ) n(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Continuité de fonctions d'une variable

Exercice 135 Sur quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles continues?

$$1^\circ) x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} \quad 2^\circ) x \mapsto \sqrt{x^3 - 1} \quad 3^\circ) x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad 4^\circ) x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$5^\circ) x \mapsto x^{2\ln}(2x^2 - 1)$$

Exercice 136 Soit f la fonction définie sur l'ensemble D_f par
$$\begin{cases} x e^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1°) Quel est l'ensemble de définition D_f ? 2°) f est-elle continue sur cet ensemble?

Exercice 137 Soit w la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $w(x)$ est le nombre de chiffres à gauche de la virgule dans l'écriture décimale de x ($w(890,5) = 3$, $w(\pi) = 1, \dots$)

a) Etudier la continuité de w b) Montrer que $w(x) \sim \frac{\ln(x)}{\ln 10}$ c) Etudier limites et asymptotes éventuelles à la courbe représentative de w .

Exercice 138 Dénombrer rigoureusement, en utilisant le théorème adéquat, soigneusement justifié, le nombre de solutions à l'équation : $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ puis préciser leurs valeurs à 0,1 près.

Limites. Fonctions de 2 variables.

Exercice 139 Calculer les limites suivantes : a)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy^2 - x + 3y}{xy + y^2}$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^{2y} - 2xy + y}{x^{2y} - xy} \quad c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 \text{ et } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\exp(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2}$$

Exercice 140 On considère la fonction numérique de 2 variables réelles définie sur

$D_g = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = -x\}$ par : $g : (x, y) \in D_g \mapsto \frac{2x - y}{x + y}$ Représenter graphiquement le domaine de définition D_g .

a) On se limite aux couples (x, y) tels que $y = 2x$. Déterminer
$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, 2x)$$

b) On se limite maintenant aux couples (x, y) tels que $y = 3x$. Déterminer
$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, 3x)$$

c) Etudier la limite éventuelle en $(0, 0)$ de g .

Exercice 141 (il est conseillé de résoudre l'exercice précédent avant celui-ci). On considère la fonction numérique de 2 variables réelles définie sur l'ensemble $D_h = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = -x^2\}$ par : $h: (x,y) \in D_h \mapsto \frac{x^2}{x^2 + y}$

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} h(x, 2x)$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} h(x, 3x)$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} h(x, x^2)$

c) Etudier la limite éventuelle en $(0,0)$ de h .

Exercice 142 1°) Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$

2°) En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ On pourra utiliser directement la définition donnée en cours d'une fonction

de Deux variables, ou plus facilement, poser $z = x^2 + y^2$ et encadrer l'expression $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ à l'aide d'une expression d'une seule variable réelle

Exercice 143 Sur quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles continues?

1°) $x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$ 2°) $x \mapsto \sqrt{x^3 - 1}$ 3°) $x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 4°) $x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$
 5°) $x \mapsto x^{2\ln}(2x^2 - 1)$

Exercice 144 Soit f la fonction définie sur l'ensemble D_f par $\begin{cases} x e^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1°) Quel est l'ensemble de définition D_f ? 2°) f est-elle continue sur cet ensemble ?

Exercice 145 Soit w la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $w(x)$ est le nombre de chiffres à gauche de la virgule dans l'écriture décimale de x ($w(890,5)=3$, $w(\pi) = 1, \dots$)

a) Etudier la continuité de w b) Montrer que $w(x) \sim \frac{\ln(x)}{\ln 10}$ c) Etudier limites et asymptotes éventuelles à la courbe représentative de w .

Exercice 146 Dénombrer rigoureusement, en utilisant le théorème adéquat, soigneusement justifié, le nombre de solutions à l'équation : $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ puis préciser leurs valeurs à $0,1$ près.

Elasticité

Exercice 147 1°) Calculer l'élasticité de la fonction $f: x \in \mathbb{R} \mapsto 3x^5$ 2°) On cherche les fonctions d'élasticité constante. On suppose que q est une fonction définie sur $]0, +\infty[$, d'élasticité constante k . On définit sur

$]0, +\infty[$ une fonction g par : (pour tout x de $]0, +\infty[$) $g(x) = x^{-k} q(x)$. Montrer que g est constante. En déduire qu'il existe une constante C telle que pour tout x de $]0, +\infty[$, $q(x) = C x^k$.

Différentielle de fonctions de 2 variables

Exercice 148 Pour chacune de ces fonctions de 2 variables :

- a) Calculer sa différentielle b) Donner la différentielle au point (1, 2) c) Préciser ce que signifie cette différentielle.

1°) $f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy^2 + 3y$ 2°) $f_2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(x^2 + 3y^2 + 1)$

3°) $f_3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy + x \exp(-2xy)$

Exercice 149 a) Calculer les dérivées partielles secondes - c'est à dire les dérivées partielles des dérivées partielles – de la fonction définie au 1°) de l'exercice 148,

b) retrouver dans ce cas ce que prévoit le théorème de Schwarz.

Exercice 150

Montrer qu'au voisinage de $(h,k) = (0,0)$: $\exp(2h - k) = 1 + 2h - k + o(h,k)$

Exercice 151

f est une fonction définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$, dont la différentielle est donnée par :

$$df(x, y) = (2x - 6y)dx + (18y - 6x)dy$$

Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, posons $u(x, y) = x - 3y$, $v(x, y) = x - 2y$.

1°) Montrer que $x = -2u + 3v$ et $y = v - u$.

2°) Calculer $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ en fonction de x et y puis en fonction de u et v .

3°) En déduire que f ne dépend pas de v

4°) Déduire des 2 résultats précédents l'expression de $f(x, y)$ en fonction de u , puis en fonction de x et y .

Exercice 152

a) Indiquer quel est le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on puisse définir la fonction :

$$f : (x,y) \in D \mapsto 3y + x + \ln(xy - 1)$$

b) Déterminer la différentielle de f

c) Justifier que l'égalité $f(x,y) = 7$ définit, au voisinage (préciser ce terme) de $(1, 2)$, y en fonction d' x , $y = \varphi(x)$. On ne demande pas de trouver l'expression de φ .

d) Déterminer $\varphi'(1)$

Exercice 153

a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2y + \exp(xy)$

b) Déterminer la différentielle de f

c) Justifier que l'égalité $f(x,y) = 2$ définit, au voisinage (préciser ce terme) de $(x,y) = (1, 0)$, y en fonction d' x , $y = \varphi(x)$. On ne demande pas de trouver l'expression de φ .

d) Déterminer $\varphi'(1)$

Développements limités

Exercice 154

Appliquer lorsque les conditions suffisantes sont remplies le théorème des accroissements finis aux fonctions et aux intervalles suivants.

Lorsque c'est possible, trouver une valeur pour le réel c de la formule.

a) $x \in [1, e] \mapsto \ln(x)$ b) $x \in [-\pi, +\pi] \mapsto \sin(x)$ c) $x \in [-\pi, +\pi] \mapsto |\sin(x)|$

a et b désignent deux nombres réels satisfaisant $a < b$: d) $x \in [a, b] \mapsto x^2$, e) $x \in [a, b] \mapsto \exp(2x)$

Exercice 155

Ecrire le développement de Taylor Young à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes, au voisinage des valeurs indiquées :

- a) $x \mapsto \exp(3x)$, au voisinage de $x = 0$,
- b) $x \mapsto -1 + \exp(2x)$, au voisinage de $x = 1$, puis au voisinage de $x = 0$.
- c) $x \mapsto \ln(3+x)$, au voisinage de $x = 0$, puis au voisinage de $x = 1$.
- d) $x \mapsto 1/(2x+1)$, au voisinage de $x = 0$.
- e) $x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$, au voisinage de $x = 0$

Exercice 156

Ecrire un développement limité à l'ordre 3 des fonctions suivantes, au voisinage des points indiqués.

- a) $\exp(3x+2)$, au voisinage de $x = 0$, en utilisant les deux méthodes, le développement de Taylor-Young, puis les développements limités usuels.
- b) $x \in]-1/5, +\infty[\mapsto \ln((5x+1)^2)$, au voisinage de $x = 0$ (utiliser le développement de Taylor Young, puis des développements limités usuels).
- c) $x \in \mathbb{R} \mapsto 10^{3x}$, à l'ordre 3, au voisinage de $x = 0$.
- d) $x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$, au voisinage de 0, en utilisant les développements limités usuels.
- e) $x \in]-2, +\infty[\mapsto \ln(2+x)$, au voisinage de 0, en utilisant les développements limités usuels.
- f) $x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$, au voisinage de 1, en utilisant les développements limités usuels. On posera $x=1+h$

Exercice 157 On définit sur $]-1, +\infty[$

- une fonction h par $h: x \in]-1, +\infty[\mapsto h(x) = \ln(2+x+\exp(x))$
- et une fonction g par : $x \in]-1, +\infty[\mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{h(x) - \ln 3}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2/3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Question 1 Evaluer $h(0)$

Question 2 Evaluer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ à l'aide d'une dérivation.

Question 3 Donner le développement limité, à l'ordre 2 au voisinage de $x = 0$, de $\exp(x)$

Question 4 Donner le développement limité, à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$, de $\ln(1+t)$

Question 5 Montrer que $h(x) = \ln(3) + \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{18} + x^2 \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Question 6 En déduire le résultat de la question 2, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Pour les 2 questions suivantes particulièrement, n'oubliez pas de justifier :

Question 7 g est-elle continue en 0 ?

Question 8 g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $g'(0)$?

Applications linéaires

Exercice 158 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- a) $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x,y,z) \mapsto f_1(x,y,z) = (x, x+2y+z)$
- b) $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x,y) \mapsto f_2(x,y) = (x+y, 0, 3x)$
- c) $f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x,y,z) \mapsto f_3(x,y,z) = (2y, xy)$
- d) $f_4: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x,y,z) \mapsto f_4(x,y,z) = (x+2, y+z)$
- e) $f_5: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: (x,y,z) \mapsto f_5(x,y,z) = x+2z$
- f) $f_6: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x,y) \mapsto f_6(x,y) = x \cdot (3, -1, 1)$
- g) $f_7: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x,y) \mapsto f_7(x,y,z) = x(y, 2y, 1)$
- h) $f_8: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x,y) \mapsto f_8(x,y) = (x,x) + (0,1)$
- i) $f_9: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x,y,z) \mapsto f_9(x,y,z) = (x^2, 2y, 3z)$
- j) $f_{10}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x,y) \mapsto f_{10}(x,y) = (x+y, 2x)$

Exercice 159

- a) Donner la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de l'application linéaire f_2 de l'exercice 158 .
 b) Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ – base de départ et d'arrivée – de l'application linéaire f_{10} de l'exercice 158 .

On considère dorénavant l'application linéaire f_1 de l'exercice 158 a).

- b) Donner la matrice de f_1 dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
 c) Montrer que $(1,1,0)$, $(1, -1,0)$, $(0,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de l'application linéaire f_1 dans cette base de $\mathbb{R}^3$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
 d) Donner la matrice de l'application linéaire f_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base $((1,1), (0,1))$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 160 f désigne une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$.

- a) montrer que si $X_1, X_2, \dots, X_k$ sont k vecteurs liés de $\mathbb{R}^n$, alors $f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_k)$ sont des vecteurs liés de $\mathbb{R}^p$.

on considère l'application linéaire g qui à tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $g(x,y,z) = (x+y+2z, 0)$ de $\mathbb{R}^2$.

- b) montrer que g est une application linéaire
 c) calculer $g(1,0,0)$, $g(0,1,0)$, $g(0,0,1)$.
 d) les images par une application linéaire d'une famille libre de vecteurs sont-elles toujours libres ?

Exercice 161

- a) montrer que les vecteurs $A = (1,2)$, $B = (0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Elle sera notée B_1 .
 b) montrer que $U = (1, 2, 3)$, $V = (3, 4, 0)$, $W = (1,0,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Elle sera notée B_2 .
 c) Justifier le fait qu'il y a une, et une seule, application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ g satisfaisant à : $g(1,2) = (0,0,0)$ et $g(0,1) = U$. Cette question ne nécessite pas de longs calculs.
 d) Montrer que l'ensemble des vecteurs X solutions de $g(X) = (0,0,0)$ – cet ensemble est appelé le Noyau de g – est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par $(1,2)$. Indication : il est possible d'utiliser les coordonnées de X dans la base B_1 .
 e) Montrer que pour tous vecteurs Y et Y' de $\mathbb{R}^2$, $g(Y) = g(Y')$ si et seulement si $g(Y - Y') = (0,0,0)$
 f) Montrer que pour tous vecteurs Y et Y' de $\mathbb{R}^2$, $g(Y) = g(Y')$ si et seulement si il existe a de $\mathbb{R}$ satisfaisant à $Y = Y' + a(1,2)$.
 e) Donner la matrice de g dans les bases B_1 (départ) et B_2 (arrivée).

Exercice 162

On note C_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et C_2 Celle de $\mathbb{R}^2$.

On note $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$.

- a) montrer que $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. On la notera dorénavant B_3 .
 b) Montrer que $(1,2)$ et $(1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$, que l'on notera dorénavant B_2 .
 c) On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exprimer, pour tout vecteur $X = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, $f(X)$ en fonction de x,y , et z

- d) Exprimer $f(i)$, $f(j)$, $f(k)$ en fonction de $u = (1,2)$ et $v = (1,1)$
 e) Trouver la matrice de f dans les bases C_3 de $\mathbb{R}^3$ et B_2 de $\mathbb{R}^2$.
 f) Trouver la matrice de f dans la base B_3 de $\mathbb{R}^3$ et B_2 de $\mathbb{R}^2$
 g) Trouver la matrice de f dans la base B_3 de $\mathbb{R}^3$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$

On considère l'application linéaire g qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans les bases B_3 et B_2

- h) Montrer que $g(i) + g(j) = u - v$, $g(i) + 2g(j) = u + 2v$, $g(i) + g(j) + g(k) = 3v$
 i) En déduire la matrice de g dans les bases C_3 et B_2 .
 j) Trouver la matrice de g dans les bases C_3 et C_2 .