

Licence Economie Gestion 1ère année.
2022 2023
TD de mathématiques 1. Cours de P. Beau.
Série d'exercices n°1.

Préliminaires. Expression mathématique

Conditions nécessaires, suffisantes. Expression mathématique.

Exercice 1 *Reconnaître une condition nécessaire ou suffisante*

(a) est-elle une condition nécessaire à (b) ? (b) est-elle une condition nécessaire à (a) ? (a) et (b) sont-elles équivalentes ?
L'exprimer par une des 3 propositions : si (a) alors (b) ; si (b) alors (a) ; (a) si et seulement si (b).

1°) (a) Le polygone P est un rectangle (b) Le polygone P a 4 côtés

2°) (a) Le triangle T a au moins 2 angles de 60° (b) le triangle T est équilatéral
rappels : un triangle est équilatéral si et seulement si ses 3 angles sont de 60° ($\pi/3$ radians). D'autre part la somme des mesures des 3 angles d'un triangle est 180° (π radians).

3°) (a) L'étudiant Machin est présent à l'épreuve de rattrapage de micro-économie
(b) L'étudiant Machin a échoué à l'épreuve de micro-économie de la première session

4°) (b) Ursule était inscrite pour l'année 2015-2016 à la faculté Jean Monnet
(a) Ursule a validé sa 1ère année de licence en Juin 2016 à la faculté Jean Monnet

Exercice 2 *Utiliser une condition nécessaire ou suffisante*

Indiquer quelles sont les affirmations correctes, les exprimer en indiquant des conditions nécessaires, équivalentes, ou suffisantes.

1°) Arthur a dit hier : "Demain, si Arnold me prête son scooter, alors je vais au cinéma"
Aujourd'hui Arthur est au cinéma. Donc Arnold lui a prêté son scooter.

2°) Arsinoe a dit hier: "Demain, si on me prête un scooter, alors je vais au cinéma"
Aujourd'hui Arsinoe révisé ses cours toute la journée. Donc on ne lui a pas prêté de scooter.

3°) Aristide a dit hier: "si je vais au cinéma demain, c'est qu'il pleut" – qu'on peut interpréter ainsi : « si je vais au cinéma, alors il pleut » – .

- | | |
|---|-----------------------------------|
| a) Aujourd'hui il pleut | Donc Aristide est au cinéma |
| b) Aujourd'hui Aristide n'est pas au cinéma | Donc il ne pleut pas |
| c) Aujourd'hui il ne pleut pas | Donc Aristide n'est pas au cinéma |

4°) Tous les oiseaux ont des plumes

Or Kiki a des plumes

Donc Kiki est un oiseau

5°) Tous les oiseaux se reproduisent en pondant des œufs.

Or Toto a pondu un œuf

Donc Toto est un oiseau .

6°) Tous les mammifères allaitent leurs petits

a) Or Zuzu allaite ses petits

Donc Zuzu est un mammifère

b) Or les petits de Dodo n'ont pas été allaités

Donc Dodo n'est pas un mammifère

7°) Seuls les mammifères allaitent leurs petits

Or Zaza allaite ses petits

Donc Zaza est un mammifère.

8°) Seuls des étudiants présents à l'écrit sont convoqués à l'oral.

a) Arsène n'est pas convoqué à l'oral

Donc Arsène n'était pas présent à l'écrit

b) Arsène était présent à l'écrit

Donc Arsène est convoqué à l'oral

c) Arsène est à l'oral

Donc Arsène était présent à l'écrit.

9°) Tous les étudiants présents à l'écrit sont convoqués à l'oral

Arsène est à l'oral

Donc Arsène était présent à l'écrit

10°) Tous les étudiants présents à l'écrit sont convoqués à l'oral

Vetea n'est pas convoqué à l'oral

Donc Vetea n'était pas à l'écrit

11°) Seuls les étudiants présents à l'écrit sont convoqués à l'oral

Micky n'est pas à l'oral

Donc Micky n'était pas à l'écrit.

12°) Tous les extrema locaux de la fonction f annulent la dérivée.

Or $f'(2) = 0$

Donc f atteint bien un extremum local en 2

Exercice 3_ Voici des réponses à la question suivante : « **Montrer que les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $2x f(x) = f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme**

$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = m \exp(x^2)$, avec m nombre réel. »

Sont-elles correctes toutes les deux ? L'une d'elles seulement est-elle correcte? Aucune des deux n'est-elle correcte et dans ce cas quelle pourrait être une réponse correcte ?

1ère réponse :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = m \exp(x^2)$, avec m appartient à $\mathbb{R}$

f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x m \exp(x^2) = 2x f(x)$.

2nde réponse :

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x f(x)$.

Posons pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \exp(-x^2)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout x de $\mathbb{R}$: $g'(x) = f'(x) \exp(-x^2) - 2x f(x) \exp(-x^2)$

or $f'(x) = 2x f(x)$ par hypothèse,

donc $g'(x) = 2x f(x) \exp(-x^2) - 2x f(x) \exp(-x^2) = 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Donc g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Donc il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = m$

Donc $f(x) \exp(-x^2) = m$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Donc $f(x) = m \exp(x^2)$, avec m nombre réel constant.

Exercice 4_ f, g désignent 2 variables numériques qui sont liées par : $f + g = 4$. Peut-on affirmer que $f=1$ et $g = 3$?

Exercice 5 On considère 2 variables économiques k et w liées par l'égalité : $k^2 + k + 4w^2 - 4kw - 2 = 0$
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier précisément.

- a) $k=2$ et $w=1$
- b) $k=2$ si et seulement si $w=1$
- c) si $k=2$, alors $w=1$
- d) si $w=1$, alors $k=2$
- e) $w \neq 2$

Exercice 6 *Exemple : conditions nécessaires, suffisantes, d'extrema.*

f désigne une fonction 2 fois dérivable sur son intervalle de définition. On sait par ailleurs qu'elle admet un minimum, mais on ne sait pas pour quelle valeur.

Comme à l'exercice 1, indiquer si une des 2 conditions (a), (b) est nécessaire, ou suffisante pour que l'autre soit remplie, ou si elles sont équivalentes.

1°) f est définie sur $\mathbb{R}$

- (a) la fonction f atteint son minimum en 3
- (b) $f'(3) = 0$

2°) f est définie sur $\mathbb{R}$.

- (a) la fonction f atteint son minimum en 3
- (b) $x=3$ est la seule solution à l'équation $f'(x) = 0$

3°) f est définie sur $[1; 12]$

- (a) la fonction f atteint son minimum en 3
- (b) $f'(3) = 0$

4°) f est définie sur $[1; 12]$

- (a) la fonction f atteint son minimum en 3
- (b) $x=3$ est la seule solution à l'équation $f'(x) = 0$

Rappel : si une fonction est définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle ouvert, les extrema locaux sont les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule **en changeant de signe**. Si l'intervalle est fermé, il peut y avoir de plus des extrema aux bornes. Pour trouver un extremum, on peut dresser un tableau de variations, ou encore comparer tous les extrema locaux.

Exercice 7 *Langage mathématique.*

f désigne une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$.

Indiquer les expressions qui ont un sens, les traduire en langage courant.

$E = \{ \forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; x = y^2 - y \}$; $F = \{ f(t); t \in [-1; 2] \}$

$G = \{ \exists x \in \mathbb{R} / f(x) > 0 \}$; $H = \{ x \in \mathbb{R} / \exists f(x) > 0 \}$ $I = \{ x \in \mathbb{R} / f(x) > 0 \}$

$J = F + I$ $K = F \cap I$ $3 \in F$ $F \in I$ $F \subset I$

Fonctions usuelles

Exercice 8 On considère un plan muni d'un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite passant par les points de coordonnées (2, 4) et (-1, 5).

Exercice 9 Trouver le point à l'intersection des deux droites D_1 et D_2 d'équations :

$$(x, y) \in D_1 \Leftrightarrow y = 2x + 3 \quad \text{et} \quad (x, y) \in D_2 \Leftrightarrow y = 4x + 5$$

Exercice 10 Trouver l'équation de la droite passant par le point de coordonnées (1, -1) et parallèle à la droite D d'équation $(x, y) \in D \Leftrightarrow y = 5x - 2$

Exercice 11 On considère les 3 points du plan : A(2, 1) B(1, 3) C(3, 4).

- a) Trouver l'équation de la droite (AB)
- b) Trouver l'équation de la droite parallèle à (AB), passant par C
- c) Trouver l'équation de la droite perpendiculaire à (AB), passant par C
- d) Déterminer le point de (AB) d'ordonnée 5

Exercice 26 k est une fonction définie et bornée sur $\mathbb{R}$. C'est-à-dire qu'il existe A de $\mathbb{R}$ satisfaisant à :

$$(\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}) \quad -A \leq k(x) \leq A.$$

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à : $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 + x^2 k(x)$

Prouver que f est dérivable en 0, et trouver $f'(0)$. Attention on ne sait pas si k est dérivable.

Exercice 27 En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases} \quad \text{n'est pas dérivable en 0.}$$

Exercice 28 On considère la parabole P d'équation : $(x, y) \in P \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$ a, b, c sont des nombres constants et $a \neq 0$, et l'hyperbole d'équation : $(x, y) \in H \Leftrightarrow (x \neq 0) \text{ et } y = 1/x$.

On cherche sur chaque courbe deux points dont les tangentes soient parallèles entre elles.

Montrer qu'il n'y a pas deux points de tangentes parallèles sur la parabole P, et qu'il en existe sur l'hyperbole H, préciser lesquels.

Exercice 29 On cherche un polynôme dont le graphe rencontre celui de la fonction $\sqrt{x}$ aux points d'abscisses 1, 4 et 9.

a) Quelles sont les ordonnées de ces points ?

b) Prouver qu'un polynôme de degré 1 ne peut pas satisfaire cette condition.

c) Trouver le(s) polynôme(s) de degré 2 satisfaisant à cette condition.

d) Chercher le(s) polynôme(s) de degré 2 dont le graphe rencontre celui de la fonction $\sqrt{x}$ aux points d'abscisses 1 et 4, et dont la tangente au point (1, 1) est la même que celui du graphe de la fonction $\sqrt{x}$.

Exercice 30 Calculer les dérivées des fonctions f définies par les expressions suivantes, après avoir précisé les ensembles de dérivabilité, éventuellement en fonction du paramètre a, lorsqu'il apparaît.

1°) $f(x) = \sqrt{2 + e^{ax}}$

2°) $f(x) = \ln(ax^2 + a)$

3°) $f(x) = |x|$

4°) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$

5°) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}} + x - 2$

6°) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

7°) $f(x) = \sqrt{(x+a)^3}$

8°) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$

9°) $f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^3 (4 - 3x)^2$

10°) $f(x) = \ln(\sin x)$

11°) $f(x) = \frac{x-2}{x+3} + x$

12°) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+2} + 3} + \sqrt{x+2}$ (en utilisant

l'exce précédent)

13°) $f(x) = \sqrt{\ln[\exp(2x) + 1]}$

14°) $f(x) = (3x^5 - 3x + 2)^3$

15°) $f(x) = \ln\left(\frac{|(2x-3)(1+2x)|}{|2x-1|}\right)$

16°) $f(x) = \ln(\ln(ax))$

17°) $f(x) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

18°) $f(x) = 4^x$ (rappel $4^x = \exp(x \ln 4)$ par définition)

19°) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Exercice 31 – Des logarithmes en économie.

Pour 8 entreprises de tailles très différentes on a noté x leur consommation d'eau en Janvier 2016 et x' leur consommation d'eau en Janvier 2017, en m³. Toutes les valeurs sont arrondies à 0,001 près.

x	36	3000	896	600	402	8000	19600	304
x'	37,800	3150	940,800	618	414,06	8240	19208	297,92
x' - x	1,800	150	44,800	18	12,06	240	- 392	- 6,08
lnx	3,584	8,006	6,798	6,397	5,996	8,987	9,883	5,717
lnx'	3,632	8,055	6,847	6,426	6,026	9,017	9,863	5,697
lnx' - ln x	0,049	0,049	0,049	0,030	0,030	0,030	- 0,020	- 0,020
x'/x	1,050	1,050	1,050	1,030	1,030	1,030	0,980	0,980

A – Quelques manipulations ...

- a) Observe-t-on un point commun sur la variation des valeurs $x' - x$? et sur la variation des logarithmes $\ln x' - \ln x$? Sur le rapport x'/x ?
- b) Indiquer, pour chacune des 8 entreprises, quelle a été la variation en pourcentage de la consommation de Janvier 2016 à Janvier 2017 .
- c) Pour comparer l'évolution de consommation des 3 premières, qu'utiliserait-on dans le langage courant ? La variation en m^3 ? La variation du logarithme ? La variation en pourcentage ?
- d) De façon générale, pour étudier l'évolution d'une variable économique pour diverses entreprises, doit-on s'intéresser à la variation brute de cette variable ou sa variation en pourcentage ?

B – Le lien avec une célèbre propriété de la fonction $\ln$.

a) que vaut $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$?

Supposons qu'une variable économique atteigne une valeur x en Janvier 2016 , varie d'un pourcentage p en un an, pour atteindre une valeur x' en Janvier 2017. Notons t la quantité $p/100$.

b) Exprimer x' en fonction de x et p , puis en fonction de x et t .

c) Montrer que $\ln x' - \ln x = \ln(1+t)$

d) Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln x' - \ln x}{t} = 1$

e) Evaluer t pour les 8 entreprises du tableau.

f) Comparer t et $\ln x' - \ln x$ dans ces 8 cas. Expliquer en quoi cette comparaison est en accord avec les réponses aux questions précédentes.

C D'après A et B, lorsque le logarithme d'une variable économique x varie d'une (faible) quantité t , quelle interprétation pratique peut-on en donner sur l'évolution d' x ?

C – Un exemple : la croissance du Japon.

piB par hab, Japon, 1937-1994

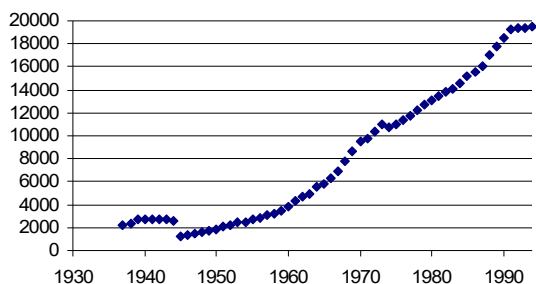


Figure 1

$\ln(\text{piB par habitant})$, Japon, 1937-1994

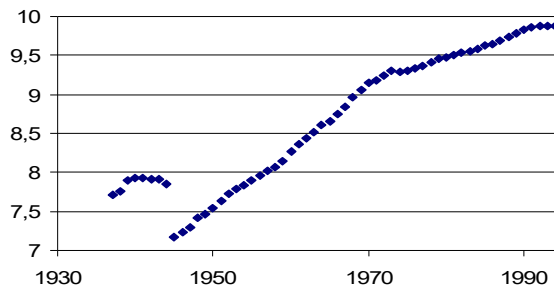
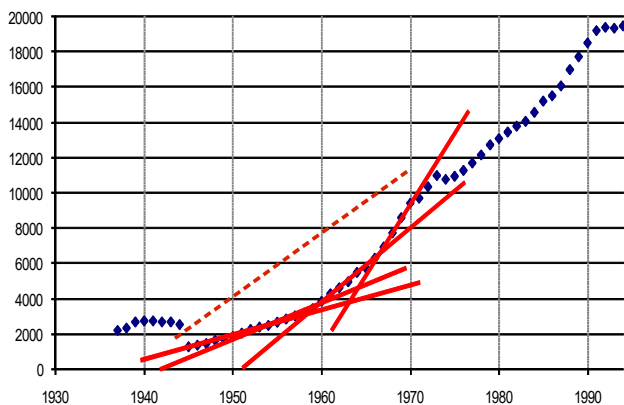
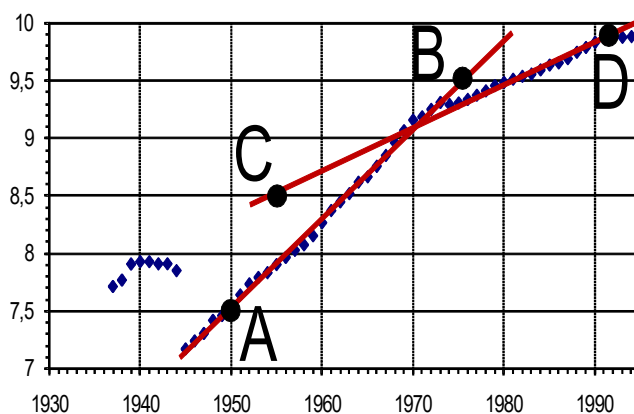


Figure 2

piB par habitant, Japon, 1937-1994



$\ln(\text{piB par habitant})$, Japon, 1937-1994



Voici l'évolution du Pib par habitant au Japon, évalué en Dollars U.S. constants, de 1937 à 1994. Sur la figure 1 est tracé le Pib par habitant, et sur la figure 2 son logarithme.

Pour étudier, puis interpréter, l'évolution d'une grandeur économique, on cherche d'abord s'il s'en dégage une tendance linéaire, c'est-à-dire s'il apparaît clairement une fonction affine qui résume cette évolution, avec certes autour de cette tendance quelques inévitables variations, qui se compensent en moyenne. D'après les figures 3 et 4, quelle variable se prête le mieux à une approximation par une fonction affine sur une longue période et pourquoi ?

a) On s'intéresse maintenant à la figure 4. Deux droites ont été tracées.

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

Lorsqu'en se déplaçant sur cette droite, on accroît les abscisses d'1 unité (une année), de quelle quantité s'accroissent les ordonnées (le logarithme du pib) ?

c) D'après A, B et a), comment pourrait-on résumer l'évolution du Pib du Japon de 1950 à 1970 ?

d) Même question pour la période allant de 1973 à 1990.

e) Comparer avec les descriptions de la croissance du Japon que vous trouvez dans des ouvrages d'Histoire Economique, à la bibliothèque universitaire, ou à la page Japon de Wikipedia <http://fr.wikipedia.org/wiki/Japon>. Y indique-t-on une différence importante entre les années 50-60 et les années 70-80 ? De quel ordre ?

f) La figure 3 permet-elle d'évaluer cette différence entre ces 2 périodes ?

g) La courbe de la figure 1 fait apparaître un petit décrochement vers 1945. Qu'en est-il de la courbe de la figure 2 ? Y a-t-il eu au Japon des événements importants cette année ? Quelle figure reflète le mieux la réalité ?

h) Le Pib par habitant est évalué à 2 558 \$ U.S. En 1944, 1 295 \$ U.S. en 1945, 19 505 \$ U.S. en 1994.

- Peut-on considérer que la variation brute du Pib en 1945 est importante ?
- Peut-on considérer que la variation en pourcentage du Pib en 1945 est importante ?
- Quelle figure fait apparaître des variations brutes ? Quelle figure fait apparaître des variations en pourcentage ?

D - Un autre exemple. Un économiste s'intéresse au chiffre d'affaires des restaurants de la côte normande. La première semaine de Mai il pleut. La seconde semaine est plus ensoleillée. Les chiffres d'affaires (C.A.) hebdomadaires des restaurants étudiés vont de 1 200 à 13 000 euros. L'économiste vous confie les valeurs de tous ces C.A. pour ces 2 semaines. Que sera-t-il le plus judicieux d'étudier ? Le C.A. ou le logarithme du C.A. ? Pourquoi ?

Domaines de définition

Exercice 32 – Indiquer les plus grands sous-ensembles possibles de $\mathbb{R}$ sur lesquels on puisse définir les fonctions suivantes :

$$x \in \text{Df}_1 \mapsto f_1(x) = \sqrt{\exp(-x)+1} \quad ; \quad x \in \text{Df}_2 \mapsto f_2(x) = \sqrt{\exp(-x)-3} \quad ;$$

$$x \in \text{Df}_3 \mapsto f_3(x) = \ln(2-\sqrt{x}) \quad ; \quad x \in \text{Df}_4 \mapsto f_4(x) = 1 / \sin x$$

Exercice 33 – Indiquer les plus grands sous-ensembles possibles de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels on puisse définir les fonctions suivantes, construire ces ensembles dans un plan

$$g_1 : (x,y) \in \text{Dg}_1 \mapsto \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \quad g_2 : (x,y) \in \text{Dg}_2 \mapsto \ln(xy) \quad g_3 : (x,y) \in \text{Dg}_2 \mapsto \ln(x) + \ln(y)$$

$$g_4 : (x,y) \in \text{Dg}_4 \mapsto \sqrt{x/y} \quad g_5 : (x,y) \in \text{Dg}_5 \mapsto \sqrt{x+y-2}$$

$$g_6 : (x,y) \in \text{Dg}_6 \mapsto \ln(x^2 - y) \quad g_7 : (x,y) \in \text{Dg}_7 \mapsto \ln(x + y^2)$$

$$g_8 : (x,y) \in \text{Dg}_8 \mapsto x^y \quad (\text{rappel : } x^y = \exp(y \ln x))$$

Espaces vectoriels

Exercice 34 Résoudre, en détaillant les calculs, avec la méthode de combinaison de lignes, le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 6y - z = 0 \\ 9x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 35 Résoudre, en détaillant les calculs, avec la méthode de combinaison de lignes, le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 6y - z = 0 \\ -3x + 8y - 3z = 0 \end{cases}$$

Exercice 36 Résoudre , en détaillant les calculs, avec la méthode de combinaison de lignes, le système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 2x + 6y = 1 \\ 5x + 4y = -3 \end{cases}$$

Exercice 37 Résoudre, en détaillant les calculs, avec la méthode de combinaison de lignes, le système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 2x + 6y = 1 \\ 5x + 4y = -2 \end{cases}$$

Exercice 38 Résoudre, en détaillant les calculs, avec la méthode de combinaison de lignes, le système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 6x + 4y = -4 \\ 9x + 6y = -6 \end{cases}$$

Exercice 39 Calculer les combinaisons linéaires suivantes, dans $\mathbb{R}^4$:

a) $5(1, 3, -4, -2) + 2(-10, 2, 1, 4)$.

b) $3k(-10, 0, 2, 3) + 2(1+k, 7, 0, -1) - 4(2, 3, 4, 5)$ k désigne un nombre fixe.

Exercice 40 Trouver (tous) les nombres a, b , tels que le vecteur de $\mathbb{R}^4$

$a(-1, 2, -2, 3) + b(1, 2, 3, -5) + (4, 5, -1, 3)$ ait ses 2 dernières composantes nulles.

Exercice 41 Trouver (tous) les nombres a, b, c tels que le vecteur de $\mathbb{R}^4$

$a(-1, 2, -2, 3) + b(1, 2, 3, -5) + c(4, 5, -1, 3)$ ait ses 2 dernières composantes nulles.

Exercice 42 Trouver (tous) les nombres a, b solutions de

$a(1, -3, -2) + b(2, 4, 6) + (-8, 9, 7) = (0, 0, 0)$

Exercice 43 On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Construire les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{s} = -2\vec{w}$

Exercice 44 Montrer que $(-1, 1, -12, 2)$ est combinaison linéaire de $(1, 1, -2, 2)$ et $(3, 2, 1, 4)$ avec des coefficients que l'on précisera.

Exercice 45 Montrer que $(1, 3, -1, 2)$ n'est pas combinaison linéaire de $(1, 1, -2, 2)$ et $(3, 2, 1, 4)$.

Exercice 46 Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de $(1, 2)$ et $(1, 3)$

Exercice 47 Montrer que les éléments de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas tous combinaisons linéaires de $(4, 6)$ et $(6, 9)$

Exercice 48 On considère l'ensemble A des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ s'écrivant $(x, 0)$, avec x nombre de $\mathbb{R}$. On peut exprimer ainsi cette définition $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$. On considère B l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini ainsi : $B = \{(0, x) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$.

1°) Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

2°) L'intersection de 2 sous-espaces vectoriels – rappel : l'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant aux deux ensembles à la fois – d'un espace vectoriel est-elle toujours elle aussi un espace vectoriel ?

3°) Préciser quelle est l'intersection de A et B.

4°) On considère la réunion de A et B, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs appartenant à A ou à B.

Rappels :

- en mathématiques, OU accepte que les 2 conditions à la fois soient satisfaites, il s'agit donc des vecteurs appartenant à A, à B, ou éventuellement à A et B à la fois.
- La réunion de A et B est notée $A \cup B$.

Montrer que $A \cup B$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 49 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

a désigne un paramètre. Eventuellement donner la réponse en fonction de a.

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}; B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 1\}; C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 3x - y = 0\};$$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2; x - 2y + z = 0 \text{ et } x - y = 0\}; E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0 \text{ ou } x - y = 0\}$$

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y \geq 0\}; G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2\};$$

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 0\}; I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y,z) = (x+y).(2,3,1)\}$$

$$J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 3z = a\}; K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x - ay + 3z = 0\}$$

Exercice 50 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?

$$L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; z = 0\}; M = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; y = 1\}; N = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; y = z+t\};$$

$$O = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; 2x = y + z \text{ et } x + 2y + 3z - t = 0\}; P = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; y = z+t \text{ ou } z = 0\};$$

$$Q = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; xy = 0\}; R = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; y \in Q\}; S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; z = x^2\}$$

Exercice 51 On cherche à montrer que $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 4x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

La réponse suivante comporte des fautes. Les repérer et les corriger.

« Pour tout $X = (x,y,z)$, tout $Y = (x',y',z')$ de $\mathbb{R}^3$ et tout λ de $\mathbb{R}$,

$$X+Y = 4x + y + z + 4x' + y' + z' = 0$$

Donc A est stable

$$\text{Pour tout } X \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ et tout } \lambda \text{ de } \mathbb{R}, \lambda \cdot X = \lambda (x,y,z) = 4\lambda x + \lambda y + \lambda z \\ = \lambda (4x + y + z) = 0$$

Donc A est stable

Donc A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. »

Exercice 52 On considère l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On rappelle que l'ensemble V_3 des vecteurs de l'espace est un espace vectoriel. Tous les vecteurs seront représentés avec O pour origine.

Représenter les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{w} = 2\vec{j} + \vec{k}$

Montrer que les ensembles $D = \{\alpha \vec{u}, \alpha \in \mathbb{R}\}$, $P1 = \{\alpha \vec{k} + \beta \vec{j}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$, $P2 = \{\alpha \vec{u} + \beta \vec{w}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$, sont des sous-espaces vectoriels de V_3 .

Construire leurs représentations.

Quelle est l'intersection de P1 et P2 ?

Comment montrer sur la figure que l'union de P1 et P2 n'est pas un espace vectoriel?

Exercice 53 a) Les vecteurs suivants engendrent-ils $\mathbb{R}^2$? 1°) $(1; -2)$ et $(2;0)$ 2°) $(2;4)$ et $(-3;-6)$

b) Les vecteurs suivants engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? Eventuellement, indiquer la réponse en fonction du paramètre a.

1) $(1,2,3)$; $(4;0;-1)$ et $(3,-2,a)$

2) $(1; 0; -2)$; $(2; 3; 1)$; $(3; 3; -1)$

3) $(1; 0; 2)$; $(1; 1; 3)$; $(2; 1; 5)$; $(0; 1; 2)$?

4) $(1,1,2)$; $(2,3a,1)$?

Exercice 54 a) Montrer que l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y = 2x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

b) Donner un système générateur de E.

c) Même question pour l'ensemble $E' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y = 2ax\}$, où a désigne un nombre fixé. Donner un système générateur en fonction de a.

d) Même question pour l'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; y = 2ax\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

e) Même question pour $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; 3x + y - 2z = 0\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Exercice 55 On considère E, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de la question précédente :

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y = 2x\}$

a) rappeler ce qu'est un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

b) montrer que tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$

c) montrer que pourtant **E n'est pas le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,0)$ et $(0,1)$**

Exercice 56 Soit l'ensemble $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + y - 2z = 0\}$.

a) Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 2, 1)$.

b) Soit F l'intersection de E et du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $i = (1,0,0)$ et $j = (0,1,0)$. Montrer que F est engendré par un vecteur, que l'on précisera.

Même question pour G, intersection de E et du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $j = (0,1,0)$ et $k = (0,0,1)$.

c) Représenter graphiquement F,G,E dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 57 Montrer que dans ces différents cas X_1, X_2, X_3 sont liés et trouver une relation entre eux.

1) $X_1 = (1, 2, 0)$; $X_2 = (2, 4, 2)$ et $X_3 = (3,6,4)$

2) $X_1 = (3;9;6)$; $X_2 = (-2,1,0)$ et $X_3 = (2;6;4)$

3) $X_1 = (4,1,3)$; $X_2 = (1,0,2)$ et $X_3 = (2,1,-1)$

Exercice 58 Déterminer si les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ sont libres ou liées et donner leur rang. Eventuellement, discuter en fonction du nombre a.

1) $\{(1,2); (-1,2)\}$

2) $\{(2,3);(3,2);(1,0);(4,6)\}$

3) $\{(-2,1,1);(1,0,a); (2,-2,0)\}$

4) $\{(1, 2, 2) ; (a, 2+a, 2a) ; (2+a, 5+a, 6a)\}$

5) $\{(0,1,2,3);(-1,0,1,1);(1,0,0,1);(-2,0,2,2)\}$

Exercice 59 Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un système libre de n vecteurs d'un espace vectoriel V . On définit n nouveaux vecteurs f_i par $f_1 = e_1$;

$$f_2 = e_1 + e_2 ;$$

$f_k = e_1 + e_2 + \dots + e_k$ pour $k = 1, 2, \dots, n$. Montrer que $\{f_1 ; f_2 ; \dots f_n\}$ est un système libre.

Exercice 60 Déterminer le rang des systèmes suivants:

- 1) $\{(0,1);(1,-2);(2,3)\}$ 2) $\{(4,-3,2);(1,2,0);(2,-5,3)\}$
- 3) $\{(0,1,0,2);(1,1,-1,0);(2,0,1,1)\}$ 4) $\{(1;0;-1);(4;1;2);(2;1/2;1)\}$
- 5) $(1, 2, a) (2a, 4, 2), (1+2a, 6, 2+a)$

Exercice 61 L'ensemble $S = \{(2,1,1);(0,2,3);(2,4,6);(4,2,2)\}$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$? En extraire une base de $\mathbb{R}^3$. Combien de bases de $\mathbb{R}^3$ peut-on extraire de S ?

Exercice 62 On considère des ensembles $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax\}$ et $F = \{(2m,m), m \in \mathbb{R}\}$, a désigne un nombre réel fixe.

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$,

En fonction de a , déterminer $E \cap F$, intersection de E et F , donner un système générateur de E et un de F .

Mêmes questions pour les ensembles $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 3z\}$ et $H = \{(m,2m,3m), m \in \mathbb{R}\}$

Exercice 63 On considère les ensembles suivants:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=y=-z\}; F=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+2z=0\} \text{ et } G=\{(x-y,x+y,2x-3y)/x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

Remarquez bien la différence entre les sens pris par x et y dans les définitions de F et de G .

1) Montrer que E,F,G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

2) Déterminer les sous-espaces vectoriels $E \cap F$, $E \cap G$ et $F \cap G$

Exercice 64 Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini ainsi :

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; 2x + y+z+t = 0\}$$

Quelle information cela nous donne-t-il sur le rang du système suivant $\{(0,1,2,-3); (2,0,-2,-2); (2,-3,0,-1);(1,1,-1, -2)\}$?

Exercice 65 Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par:

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; x + 2y - z = 0 \text{ et } x - z + 2t = 0\}$$

Exercice 66 Dans l'île de Miri miri, 3 titres sont cotés en Bourse : Otea , Va'a , et Surf .

On représente les opérations journalières par des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Les composantes sont les nombres de titres achetés (négatifs pour une vente): un achat de 3 Otea, de 4,5 Va'a et une vente de 2 Surf correspondent au vecteur $(3 ; 4,5; -2)$.

Les titres sont infiniment divisibles, de sorte que l'ensemble des opérations, muni de la somme des opérations et de la multiplication par un réel, correspond à tout l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Pour proposer différents niveaux de performance et de sécurité, des SICAM (Stés d'investissement à capital Miri mirien) se sont mises en place, parmi elles :

p 12/14

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c \text{ pour } x \in \mathbb{R}^- \\ f(x) = \alpha x + \beta \text{ pour } x \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$$

2) Quelles conditions doivent vérifier α , β , a, b, c pour que E soit un sous-espace vectoriel de D ?

2) Quelle est la dimension de cet espace?

Exercice 75 Dans un espace vectoriel E , on considère deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 et on définit l'ensemble $E_1 + E_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in E_1 \text{ et } u_2 \in E_2\}$; on dit que $E_1 + E_2$ est la somme des deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 .

1°) Montrer que $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E

2°) a) Montrer que $E_1 \cup E_2$ est inclus dans $E_1 + E_2$

b) Montrer que $E_1 + E_2$ est inclus dans le sous-espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2$.

3°) Montrer que $E_1 + E_2$ est le sous-espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2$ (ensemble des vecteurs appartenant à E_1 ou à E_2).

Exercice 76 Extrait d'interrogation

Soient les deux systèmes de vecteurs : $S_1 = \{(a, 1, 1); (-1, -a, -1); (1, 1, a)\}$

et $S_2 = \{(a, 1, 1); (-1, -a, -1); (-1, -1, a)\}$

Déterminer suivant les valeurs de a le rang de S_1 ainsi que celui de S_2 .

Exercice 77 Extrait d'examen

Soient $V_1 = (4, 0, -2)$, $V_2 = (-8, 1, 5)$ et $V_3 = (2, 0, 0)$. Ces vecteurs sont-ils indépendants ?

On considère le sous-espace vectoriel V engendré par V_1 et V_2 . Quelle est sa dimension? Donner une base de V . V_3 appartient-il à V ? $V_4(-4, 2, 4)$ appartient-il à V ? A quelle condition sur a, b , et c un vecteur $W = (a, b, c)$ appartient-il à V ?

Exercice 78 Extrait d'examen Soient $V_1 = (1, 1, 1)$, $V_2 = (0, 1, -1)$ et $V_3 = (1, 0, -1)$.

Quel est le rang de $S = \{V_1, V_2, V_3\}$? S est-il une base de $\mathbb{R}^3$ (justifier)?

Exercice 79 Extrait d'interrogation

1) Soient $V_1 = (-1, 1, 0)$, $V_2 = (1, 0, 2)$ et F , le sous-espace vectoriel engendré par V_1 et V_2 .

a) A quelle condition sur x, y et z , $V = (x, y, z)$ appartient-il à F ?

b) Soient $V_3 = (1, 1, -1)$, $V_4 = (1, 1, 2)$ et $V_5 = (0, 1, 2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants:

$\{V_1, V_2, V_3\}$, $\{V_1, V_2, V_4\}$, $\{V_1, V_2, V_5\}$ et $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$.

2) e_1, e_2, e_3 désignent 3 vecteurs d'un espace vectoriel. La proposition suivante est-elle vraie?

$(S = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ lié}) \Rightarrow (e_3 \text{ appartient à } \langle e_1, e_2 \rangle)$.

Si la réponse est affirmative, la prouver. Sinon, donner un contre-exemple.

Exercice 80 Extrait d'examen

1) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x - 5y + z = 0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base et sa dimension.

2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(2; 1; -1)$ et $(-3; 1; 1)$.

$V = (-6, 7, 1)$ appartient-il à F ?

3) Déterminer $E \cap F$.

Exercice 81 Extrait d'interrogation

1° - On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ usuelles. Son vecteur nul $(0,0,0)$ est noté $0_{\mathbb{R}^3}$. E en est un sous espace vectoriel. $u = (a,b,c)$ désigne un vecteur de E et $v = (d,e,f)$ désigne un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors

$0 \cdot u$ appartient à E ☐ Toujours ☐ Jamais ☐ Parfois

$(0,0,0).u$ appartient à E ☐ Toujours ☐ Jamais ☐ Parfois

si $u+v$ appartient à E alors v appartient à E ☐ Toujours ☐ Jamais ☐ Parfois

$0_{\mathbb{R}^3}$ appartient à E ☐ Toujours ☐ Jamais ☐ Parfois

$u+(-1,0,2)$ appartient à E ☐ Toujours ☐ Jamais ☐ Parfois

$\langle u, 2u \rangle = \langle u \rangle$ ☐ Toujours ☐ Jamais ☐ Parfois

$(1,1,1).u=u$ ☐ Toujours ☐ Jamais ☐ Parfois

2° - $B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; y - z + 2t = 0\}$, $u = (1,1,0,1)$, $v = (0,1,1,0)$, $w = (0,-2,0,1)$, $r = (2,0,0,0)$

$B = \{(a, b-2c, b, c) ; a,b,c \text{ nombres réels}\}$ ☐ Oui ☐ Non

$B = \langle u, v, w \rangle$ ☐ Oui ☐ Non

$B = \langle w, r \rangle$ ☐ Oui ☐ Non

$B = \langle (0,2,2,0), v, w, r \rangle$ ☐ Oui ☐ Non

$B = \langle v, w, r \rangle$ ☐ Oui ☐ Non