

Exercices de TD- Feuille 4 (Variables aléatoires)

Exercice 1

Une famille de dauphins est composée de 5 femelles et 3 mâles. On choisit au hasard dans cette famille un groupe de 3 animaux, et on appelle Y la variable aléatoire "Nombre de femelles choisie". Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

Exercice 2

Une urne contient six boules indiscernables : deux vertes et quatre rouges. On tire simultanément trois boules de l'urne. Soit X la v.a. qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X , calculer son espérance.
2. On vous propose un jeu : une partie coûte 1 et vous pouvez gagner 2 fois le nombre de boules vertes tirées. On définit une nouvelle variable G : gain obtenu. Est-il vraiment intéressant de jouer ?
3. Reprendre la question 1) mais en faisant un tirage avec remise.

Exercice 3

Soit X la variable aléatoire représentant la somme de deux dés non pipés.

1. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Calculer la probabilité des événements $(X < 4)$ et $(2 \leq X < 8)$.
3. On pose $Y = 2X + 3$. Trouver l'espérance et la variance de Y .

Exercice 4

Une personne effectue trois trajets en train par semaine, le prix est de 8 euros en première classe et de 6 euros en seconde. Notre voyageur fraude systématiquement en achetant un billet de seconde mais en voyageant en première. Sur chaque trajet, il se fait contrôler avec une probabilité $1/10$ et l'amende en cas de fraude est de 30 euros.

1. Soit N le nombre de fois que le voyageur se fait contrôler. Donner $E(N)$ et $VAR(N)$.
2. Donner en fonction de N les gains hebdomadaires de notre voyageur.
3. En moyenne est-il rentable pour le voyageur de frauder systématiquement ?

Exercice 5

Un couple décide d'arrêter les naissances de ses enfants au premier garçon ou, à défaut, au cinquième enfant. On admet qu'à chaque naissance la probabilité d'avoir un garçon est p et que les sexes des différents enfants sont des événements indépendants. Quelle est l'espérance du nombre de garçons ? Du nombre de filles ? Du nombre d'enfants ?

Exercice 6

Un tiroir contient 3 chaussettes rouges et 2 chaussettes vertes.

1. On prend au hasard 2 chaussettes dans ce tiroir. Soit X le nombre de chaussettes vertes sorties du tiroir. Donner la loi, l'espérance et la variance de X .
2. On prend des chaussettes dans le tiroir, jusqu'à trouver une chaussette verte. Soit Y le nombre de chaussettes qu'il a fallu sortir. Donner la loi et l'espérance de Y .

Exercice 7

Pour faire la promotion d'un paquet de céréales, le fabricant offre des petites figurines en plastique à collectionner. La moitié des paquets commercialisés en contiennent. Parmi ces paquets là, 70% contiennent exactement une figurine, 30% en contiennent deux.

1. En achetant un paquet quelle est la probabilité de gagner exactement une figurine ?
2. Vous achetez un paquet, soit X le nombre de figurines trouvées dans le paquet. Trouver la loi de X , son espérance et sa variance.
3. Vous achetez deux paquets, soit Y le nombre de figurines trouvées au total dans les 2 paquets. Trouver l'espérance et la variance de Y sans calculer sa loi (on pourra exprimer Y comme somme de deux variables aléatoires X_1 et X_2 , puis utiliser la linéarité de l'espérance).
4. Trouver la loi de Y , et vérifier la réponse à la question précédente.
5. Votre petit cousin a deux figurines de ce genre. Ces parents ont acheté deux paquets. Quelle est la probabilité que les deux figurines proviennent du même paquet ?
6. Votre autre petit cousin veut absolument une figurine. En moyenne, combien faut-il acheter de paquets ? (on demande une argumentation mathématique)