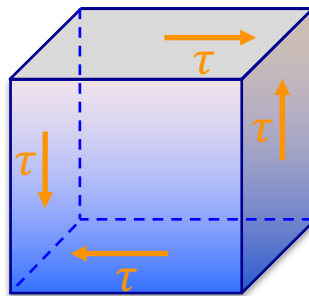
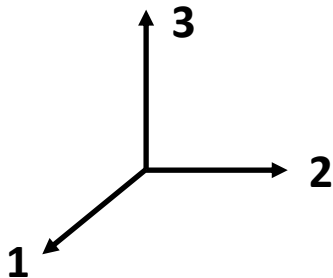
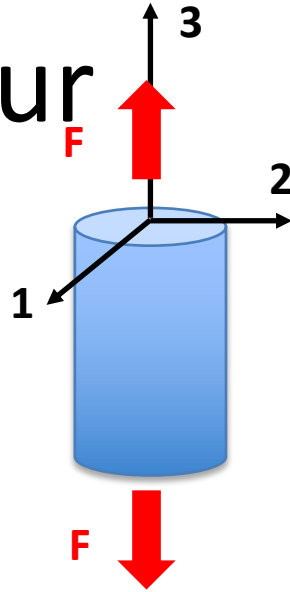


Contraintes - Forme du tenseur

1. On réalise un essai de traction sur une éprouvette cylindrique de 6 mm de diamètre selon l'axe 3 du repère. La force mesurée est égale à F . Quelle est le tenseur des contraintes au centre de l'éprouvette? Quel est le signe de chaque composante?
2. Lors d'un essai de cisaillement, le volume élémentaire représentatif est sollicité comme indiqué ci-dessous. Déterminer le tenseur des contraintes correspondant.



Contraintes - Forme du tenseur - Corrigé

1. La section de l'éprouvette est

$$S = \pi d^2/4 = \pi 6^2/4 = 28,3 \text{ mm}^2$$

Le tenseur des contraintes est donc : $\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F/S \end{pmatrix}$

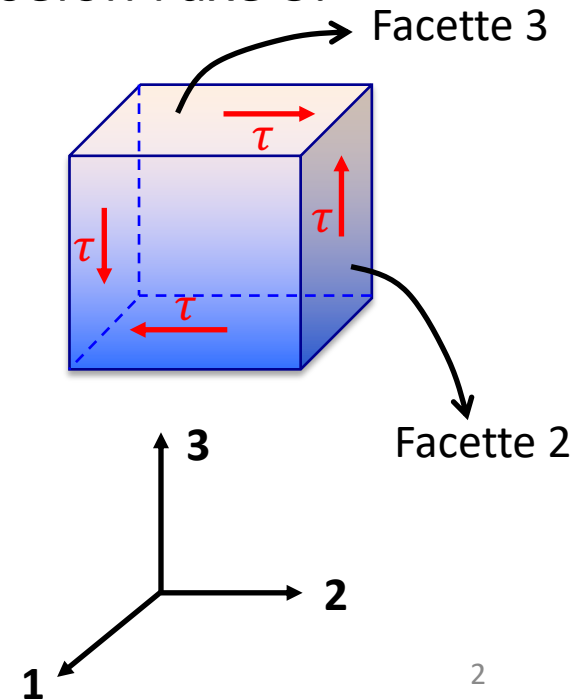
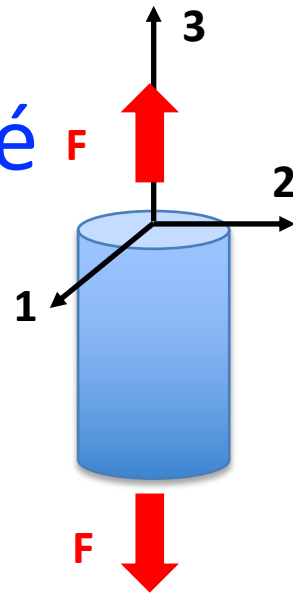
Avec $F/S > 0$ car l'éprouvette en traction.

Le terme non nul est σ_{33} car l'effort est appliqué selon l'axe 3.

2. Le tenseur des contraintes est :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \tau > 0.$$

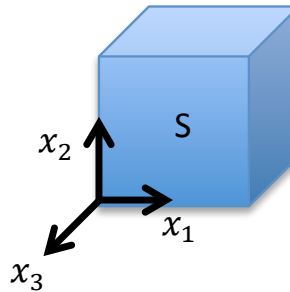
En effet, sur la facette 2, le vecteur contrainte τ est orienté selon l'axe 3 dans le sens positif tandis que sur la facette 3, le vecteur contrainte τ est orienté selon l'axe 2 dans le sens positif.



Exercice 3D

Soit un solide S (voir figure) subissant des efforts tels que le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ en son sein est de la forme suivante :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



1. Calculer le vecteur contraintes sur S au niveau des facettes extérieures à S .
2. En déduire le type de sollicitation globale subi par le solide en fonction du signe de σ_1 .
3. Comment peut-on obtenir en pratique un tel état de contrainte dans une éprouvette ?

4. Représenter une facette de normale $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ sur un schéma. Calculer le vecteur contrainte sur une facette de normale $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Conclure.

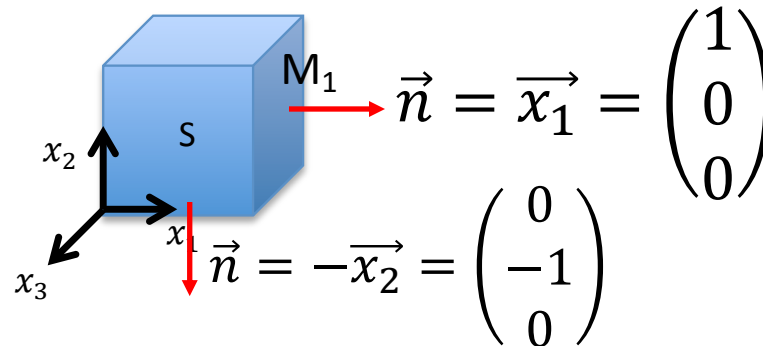
5. Calculer les contraintes principales et la contrainte de von Misès.
6. Calculer le tenseur des déformation en supposant que le matériau est élastique isotrope. Quel est le sens physique des termes non nuls de ce tenseur?

Contraintes 3D - Corrigé

Soit un solide S (voir figure) subissant des efforts tels que le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ en son sein est de la forme suivante :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_1 (1, 1/2, -1/2)$$

Orientation des normales
aux faces du cube :



Vecteur contrainte agissant sur la face de normale $\vec{x}_1$

$$\vec{T}_{x_1}(M_1, \vec{x}_1) = \bar{\bar{\sigma}}(M_1) \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Contraintes 3D - Corrigé

Question 1

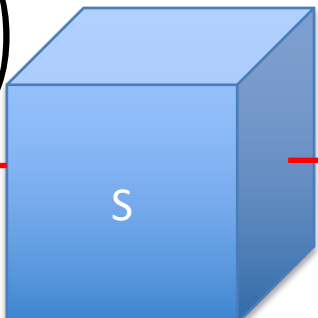
Le vecteur contrainte T_{x_1} est égal au produit du tenseur des contraintes par la normale :

$$\vec{T}_{x_1} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_{11} \vec{x}_1$$

Ordre (~~3~~,~~3~~)

Ordre (~~3~~,1)

Ordre (3,1)

$$\vec{T}_{-x_1} = -\sigma_{11} \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


$$\vec{T}_{x_1} = \sigma_{11} \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Contraintes 3D - Corrigé

Question 1

Le vecteur contrainte T_{x1} est égal au produit du tenseur des contraintes par la normale :

$$\vec{T}_{x_1} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_{11} \vec{x}_1$$

$$\vec{T}_{-x_1} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\vec{x}_1) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\sigma_{11} \vec{x}_1$$

$$\vec{T}_{x_2} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{T}_{-x_2} = \vec{T}_{x_3} = \vec{T}_{-x_3} = \vec{0}$$

Contraintes 3D - Corrigé

Question 2 : type de sollicitation

Si $\sigma_{11} > 0$, sollicitation en traction.

Si $\sigma_{11} < 0$, sollicitation en compression.

Question 3

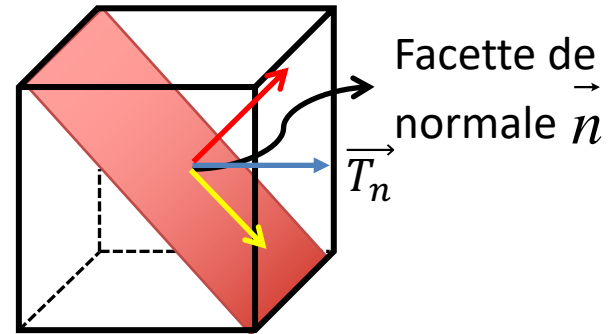
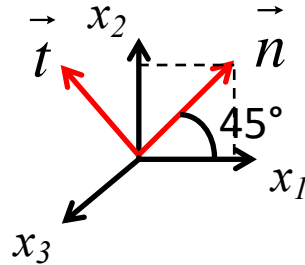
En pratique, pour la traction, il faut fabriquer une éprouvette avec une grande longueur utile, l'agripper à l'aide de mors et l'étirer. On obtient cet état de traction au cœur de l'éprouvette, loin des mors.

Pour la compression, on peut utiliser un cube ou un cylindre et le comprimer. L'état de compression est également atteint au cœur de l'échantillon, loin des bords.

Contraintes 3D - Corrigé

Question 4 : Facette inclinée

Normale $\vec{n}$ dans le plan (x_1, x_2) , bissectrice des deux vecteurs.



$$\vec{T}_n = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} \vec{x}_1$$

$$\vec{T}_n = \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} \vec{x}_1 = \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} \cos(45^\circ) \vec{n} - \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{2}} \sin(45^\circ) \vec{t} = \frac{\sigma_{11}}{2} (\vec{n} - \vec{t})$$

Quelle que soit la facette considérée, le vecteur contrainte est toujours orienté selon x_1 . Pour la facette de normale $\mathbf{n}$, le vecteur contrainte présente donc une composante perpendiculaire et une composante tangentielle à la facette.

Contraintes 3D - Corrigé

Question 5 : Contrainte de von Misès

$$Tr(\bar{\bar{\sigma}}) = \sigma_{11}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_D = \bar{\bar{\sigma}} - \frac{1}{3} Tr(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \sigma_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \sigma_{11} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_D^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \sigma_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \sigma_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \sigma_{11}^2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} Tr(\bar{\bar{\sigma}}_D^2)}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{6}{9} \sigma_{11}^2} = \sigma_{11}$$

Contraintes 3D - Corrigé

Question 6 : Tenseur des déformations

Le solide étant élastique linéaire isotrope, son comportement est modélisé par la loi de Hooke.

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}} \quad \text{Tr}(\bar{\bar{\sigma}}) = \sigma_{11}$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} \end{pmatrix}$$

Effet Poisson

Elongation due à la traction/compression

Exercice – Loi de comportement

Les propriétés d'un polymère sont étudiées à deux températures T_1 et T_2 à l'aide d'un essai de traction (figure ci-dessous).

1. Qualifier en français et en anglais ces deux comportements.
2. Calculer le module d'élasticité E en GPa de ce polymère à T_1 et à T_2 .
3. Redessiner la courbe et indiquer la courbe obtenue si on relâche les efforts en A1, en B1 et en B2.

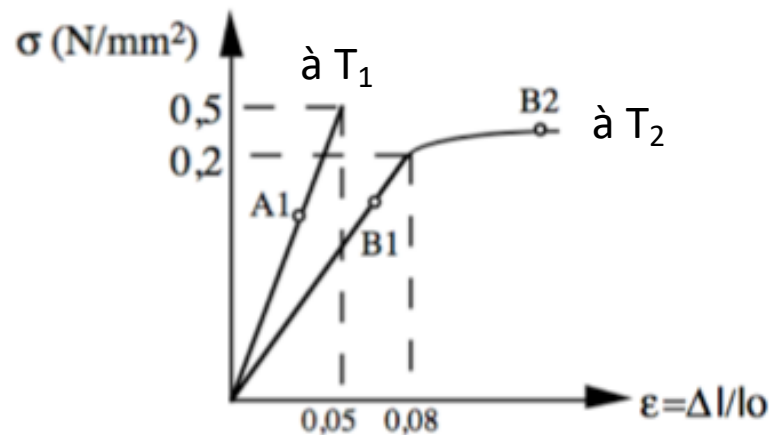


Figure 1: Courbe contrainte/déformation d'un même polymère à 2 températures différentes T_1 et T_2

Corrigé – Loi de comportement

1. A T_1 , le polymère est rigide (stiff) et fragile (brittle). A T_2 , le polymère est plus flexible (softer) et ductile (ductile). Le polymère est plus résistant (stronger) à T_1 qu'à T_2 .

2. Module d'élasticité à T_1 :
$$E_{T_1} = \frac{0,5}{0,05} = 10 \text{ MPa} = 0,01 \text{ GPa}$$

Module d'élasticité à T_2 :
$$E_{T_2} = \frac{0,2}{0,08} = 2,5 \text{ MPa} = 0,0025 \text{ GPa}$$

- 3.

