

Combinaison d'ondes

Calculer $\xi_t(x, t)$, onde résultante de la superposition des trois ondes suivantes :

$$1) \quad \xi_1(x, t) = \sqrt{3} \cdot \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \xi_2(x, t) = \sqrt{6} \cdot \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{3\pi}{4}\right)}, \quad \xi_3(x, t) = \sqrt{3} \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \xi_1(x, t) = \sqrt{3} \cdot \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \xi_2(x, t) = \sqrt{6} \cdot \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{3\pi}{4}\right)}, \quad \xi_3(x, t) = \sqrt{3} \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right)} \\
 & \xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) + \xi_3(x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\sqrt{3} + \sqrt{6} e^{i\frac{3\pi}{4}} + \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}} \right) \\
 & = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\left(\sqrt{3} + \sqrt{6} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) + i \left(\sqrt{6} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right) \\
 & \xi(x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\left(\sqrt{3} - \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i \left(\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \right) \right) \\
 & \xi(x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{12}}{2} \right) + i \left(\frac{\sqrt{12}}{2} + \sqrt{3} \right) \right) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left((\sqrt{3} - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} + \sqrt{3}) \right) \\
 & \xi(x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} (i \cdot 2 \cdot \sqrt{3}) = (i \cdot 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

3) En déduire l'expression de $\xi_w(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_3(x, t)$

$$\begin{aligned}
 \xi_w(x, t) &= \xi_1(x, t) + \xi_3(x, t) = \xi_t(x, t) - \xi_2(x, t) = 2\sqrt{3}\xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right)} - \sqrt{6}\xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{3\pi}{4}\right)} \\
 &= \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(2\sqrt{3} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \sqrt{6} e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \right) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(-\sqrt{6} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \left(2\sqrt{3} - \sqrt{6} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \right) \\
 &= \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left((-\sqrt{6}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i \left(2\sqrt{3} - \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\
 &= \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\left(\frac{\sqrt{12}}{2} \right) + i \left(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{12}}{2} \right) \right) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{2} \right) + i \left(2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{2} \right) \right) \\
 &= \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} (\sqrt{3} + i\sqrt{3}) = \sqrt{3}\xi_0 e^{i(\omega t - kx)} (1 + i) \\
 (1 + i) &\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \tan(\theta) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \\
 \xi_w(x, t) &= \sqrt{6}\xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{4}\right)}
 \end{aligned}$$

EXERCICE II (Ondes)

On considère un axe Ox sur lequel on place en $x = 0$ un haut-parleur vibrant à une fréquence de 33 Hz. Il en résulte une onde plane acoustique qui se propage dans la direction des x croissants. Calculer la pulsation ω , le vecteur d'onde k et la longueur d'onde λ sachant que la vitesse du son dans l'air est de 330 m/sec (on n'oubliera pas les unités)

$$\begin{aligned}
 \omega &= 2\pi\nu = 207,34 \text{ rad/s} \\
 k &= \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2 * 3,1416 * 33}{330} = 0,628 \text{ m}^{-1} \\
 \lambda &= \frac{c}{\nu} = 10 \text{ m}
 \end{aligned}$$

La surpression maximale est de $P_0 = 10^{-2}$ Pa. Exprimer sous forme complexe l'équation de l'onde acoustique en fonction de x et t . L'exprimer ensuite sous forme réelle en choisissant

comme origine temporelle l'instant où la surpression est maximum ($+10^{-2}$ Pa) au niveau du haut-parleur.

$$\begin{aligned}
 P(x, t) &= P_0 e^{i(\omega t - kx + \phi)} = 0.01 e^{i(207,35t - 0,628x + \phi)} \\
 P_0 \cos(\omega t - kx + \phi) &= \operatorname{Re}(P_0 e^{i(\omega t - kx + \phi)}) = 0.01 \operatorname{Re}(e^{i(207,35t - 0,628x + \phi)}) \\
 P(0, 0) &= P_0 \Rightarrow \cos(\phi) = 1 \Rightarrow \phi = 2n\pi = 0 \quad (n = 0) \\
 P(x, t) &= 0.01 \cos(207,35t - 0,628x) \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

Exprimer sous forme complexe, puis réelle, $P(2,5, t)$, $P(5, t)$ et $P(10, t)$, les équations horaires des points situés respectivement à 2,5 m, 5 m et 10 m du haut-parleur en conservant les mêmes conditions initiales qu'à la question précédente.

$$\begin{aligned}
 P(2,5, t) &= P\left(\frac{\lambda}{4}, t\right) = 10^{-2} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{k\lambda}{4}\right)} = 10^{-2} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow P(2,5, t) = 10^{-2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{Pa} \\
 P(5, t) &= P\left(\frac{\lambda}{2}, t\right) = 10^{-2} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{k\lambda}{2}\right)} = 10^{-2} \cdot e^{i(\omega t - \pi)} \Rightarrow P(5, t) = 10^{-2} \cdot \cos(\omega t - \pi) \cdot \text{Pa} \\
 P(10, t) &= P(\lambda, t) = 10^{-2} \cdot e^{i(\omega t - k\lambda)} = 10^{-2} \cdot e^{i(\omega t)} \Rightarrow P(10, t) = 10^{-2} \cos(\omega t) \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

On place à $x = -2,5 \text{ m}$, (donc en amont) de ce haut-parleur, un second haut-parleur émettant un signal identique. On suppose que cette seconde onde sonore traverse le premier haut-parleur sans être perturbée. Montrer que le signal résultant de la somme des signaux émis par ces deux hauts parleurs est une onde plane que l'on peut écrire sous la forme

$$P(x, t) = \tilde{P}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \tilde{P}_0 \text{ étant un nombre complexe que l'on précisera.}$$

$$\begin{aligned}
 P_1(x, t) &= P_0 e^{i(\omega t - kx)} \\
 P_2(x, t) &= P_0 e^{i(\omega t - k(x+2,5))} \\
 P(x, t) &= P_0 e^{i(\omega t - kx)} + P_0 e^{i(\omega t - k(x+2,5))} = P_0 e^{i(\omega t - kx)} (1 + e^{-i2,5k}) \\
 k &= \frac{2\pi}{10} \Rightarrow 2,5k = \frac{\pi}{2} \\
 P(x, t) &= \tilde{P}_0 e^{i(\omega t - kx)} \text{ avec } \tilde{P}_0 = P_0 \left(1 + e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)
 \end{aligned}$$

On déplace le second H.P. à $x = -5\text{m}$. Calculer la nouvelle amplitude de l'onde résultante.

$$P_1(x, t) = P_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$P_2(x, t) = P_0 e^{i(\omega t - k(x+5))}$$

$$P(x, t) = P_0 e^{i(\omega t - kx)} + P_0 e^{i(\omega t - k(x+5))} = P_0 e^{i(\omega t - kx)} (1 + e^{-i5k})$$

$$k = \frac{2\pi}{10} \Rightarrow 5k = \pi$$

$$P(x, t) = P_0 \cdot (1 + e^{-i5k}) \cdot e^{i(\omega t - kx)} = P_0 \cdot (1 + e^{-i\pi}) \cdot e^{i(\omega t - kx)} = P_0 \cdot (1 - 1) \cdot e^{i(\omega t - kx)} = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned} |P(x, t)|^2 &= P_0^2 (1 + e^{-i5k}) (1 + e^{i5k}) = 2P_0^2 (1 + \cos(5k)) = 2P_0^2 \left(1 + \cos\left(5 \frac{2\pi}{\lambda}\right)\right) \\ &= 2P_0^2 (1 + \cos(\pi)) = 0 \end{aligned}$$

Justifier votre résultat

La seconde source, placée à 5m est distante d'une demi longueur d'onde (10m) de la première. Les deux sources se trouvent donc en opposition de phase. Le signal émis étant identique dans chaque cas, la résultante est nulle.

Le second haut-parleur est maintenant placé face au premier, à $x = 20\text{ m}$. Il émet donc une onde acoustique dans la direction opposée à celle émise par le premier. Ecrire l'équation de l'onde sonore résultante de la somme de celles émises par ces des deux haut-parleurs

$$P(x, t) = P_0 e^{i(\omega t - kx)} + P_0 e^{i(\omega t + k(x - 20))}$$

De quel type d'onde s'agit-il (sans calcul), **justifier votre réponse** ?

Une onde stationnaire car c'est la somme de deux ondes identiques se propageant dans des directions opposées.

Où faut-il se placer pour n'entendre aucun son ?

Aux nœuds de l'onde stationnaire, c'est à dire tous les $\lambda/2 = 5\text{m}$ à partir des sources.

Combien de positions répondent à cette condition (pas de son audible) ?

En comptant les hauts parleurs, cette condition est remplie pour $x = 0, 5, 10, 15 \text{ et } 20 \text{ m}$, il y a donc 5 positions (3 si, logiquement, on exclue les H.P.).