

FEUILLE DE TD 4 - Matrices (2ème partie)

Exercice 1

1. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
2. En déduire les coordonnées des vecteurs $(3, 2, 1)$ et $(1, 1, 0)$ dans la base $b = \{(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1)\}$

Exercice 2

1. Soient dans la base canonique b de R^3 , les vecteurs v de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, w de matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, et l'application linéaire f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère les trois les vecteurs v_1 de matrice $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, v_2 de matrice $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et v_3 de matrice $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\{v_1; v_2; v_3\}$ forment une base b' de R^3 et écrire les matrices de v et w dans b' . Donner la matrice de f dans b' .
2. Soit g l'application linéaire qui a pour matrice A dans b' , donner la matrice de g dans b .

Exercice 3

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $J_2 = 2I + J$, où I désigne la matrice identité d'ordre 3. En déduire J^{-1} .
2. Déterminer les valeurs propres de J . Montrer que J est diagonalisable. Déterminer la matrice de passage P de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et vérifiant $J = PDP^{-1}$, avec D diagonale (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant).
3. Calculer J^n (justifier les formules utilisées).

4. Soient les suites u , v et w vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{4}(v_n + w_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n + v_n) \end{cases}$$

. Calculer u_n , v_n et w_n en fonction de u_0 , v_0 et w_0 .

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle B la base formée des vecteurs $(1; 1; 0)$, $(0; -1; 1)$, $(0; -1; -1)$. Dans $\mathbb{R}^2$ on appelle B' la base formée des vecteurs $(1; 1)$ et $(0; -1)$. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y, z) = (2x - y; y + z)$.

1. Donner la matrice de f dans les bases canonique de $\mathbb{R}^3$ (départ) et canonique de $\mathbb{R}^2$ (arrivée).
2. Déterminer la matrice de f dans les bases B (départ) et canonique de $\mathbb{R}^2$ (arrivée) puis la matrice de f dans les bases canonique de $\mathbb{R}^3$ (départ) et B' (arrivée) enfin la matrice de f dans les bases B (départ) et B' (arrivée).

Exercice 5

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, -y, y + z)$. Soit $b = \{(1, 0, 0); (-1, 1, 0); (0, -1, 1)\}$.

1. Montrer que b est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de f dans b

Exercice 6

f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

dans les bases B' (départ) et B' (arrivée) de l'exercice 4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique, et en déduire la formule donnant $f(x, y)$ pour un vecteur (x, y) quelconque.

Exercice 7

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique b .

1. Montrer que si $b' = (1, 1, 0); (1, 0, -1); (1, 1, 1)$, b' est aussi une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Un vecteur V de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans b et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans b' .

Donner la matrice P de passage de b à b' et la matrice P^{-1} de passage de b' à b . En déduire X en fonction de x' , y' et z' et X' en fonction de x , y et z .

3. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (4x - 5y + 4z, 4x - 5y + 4z, 3x - 3y + 3z).$$

Déterminer la matrice de f dans b et puis la matrice de f dans b' . Déterminer alors $\text{Im}f$ et $\ker f$ ainsi que les vecteurs propres et les valeurs propres de f .

Exercice 8

Soit $P = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -10 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $P^2 - 3P + 2I = 0$.
2. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1} .
3. Soit u, v et w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives $(-4, -10, 0)$; $(3, 7, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Montrer que ces trois vecteurs forment une base B' de $\mathbb{R}^3$. On appelle B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner alors la matrice de passage de B' vers B , puis celle de B vers B' .
4. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-30x + 12y, -70x + 28y, z)$. Calculer $f(u), f(v)$ et $f(w)$. Que peut-on en déduire ?
5. Trouver alors sans calcul la matrice $P^{-1} \begin{pmatrix} 30 & 12 & 0 \\ -70 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$.

Exercice 9

Soit $f(x, y, z) = (-2x + y + 9z, -2x + y + 9z, 2z)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\ker f$ et $\text{Im}f$ (on en donnera une base).
3. Calculer $f(3, 3, 1)$. Que peut-on en déduire ?
4. Calculer $f(-1, -1, 0)$. Que peut-on en déduire ?
5. Donner la matrice A de f dans $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = (-1, -1, 0)$, $v_2 = (-1, -2, 0)$ et $v_3 = (3, 3, 1)$. f est-elle diagonalisable ?
6. Donner la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$, puis celle de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 10

Diagonaliser, si c'est possible, la matrice $M = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Soit $B = \{u, v, w\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. On rappelle qu'il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $g(u) = v$, $g(v) = u$ et $g(w) = w$.

1. Donner la matrice M de g dans la base B .
2. Calculer $g(u + v)$ et $g(u - v)$.
3. En déduire que g est diagonalisable. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^1$

Exercice 12

1. Diagonaliser, si c'est possible, la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. (*) Pour quelles valeurs de a la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 13)

Diagonaliser, si c'est possible, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14

1. Diagonaliser, si c'est possible, la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
2. En déduire le calcul de A^n , $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Soient u_n et v_n deux suites définies par

- $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$.
- $\begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n - 3v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n - v_n \end{cases}$

Ecrire u_n et v_n en fonction de n .