

Exercices de TD- Feuille 2 (Probabilités conditionnelles/Événements indépendants)

Exercice 1

Dans une île déserte, un pirate enterre 2 sacs d'un trésor. Le sac en jute contient 20 pièces d'or et 30 pièces d'argent. Le sac en cuir contient 20 pièces d'or et 20 pièces d'argent. Bien plus tard, un aventurier trouve en creusant un des deux sacs. Il l'ouvre et trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse du sac en cuir ?

Exercice 2

1. Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
2. Un autre voisin a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?

Exercice 3

Un entraîneur estime que son équipe a 2 chances sur 3 de gagner chaque match. Calculer la probabilité:

1. que l'équipe ne gagne son premier match qu'à la 5ème journée.
2. que l'équipe ait gagné exactement 2 matchs au bout de 5 journées.
3. que l'équipe n'ait gagné aucun match au bout de 5 journées.

Exercice 4

3 chasseurs sont d'habiletés différentes: le premier touche sa cible avec une chance sur deux, le deuxième avec une chance sur trois, le troisième avec une chance sur quatre.

1. Un oiseau survient. Les trois chasseurs tirent en même temps et de manière indépendante. L'oiseau va vite et les chasseurs ne peuvent tirer qu'une seule fois chacun. Quelle est la probabilité que l'oiseau soit tué?
2. Les chasseurs décident de changer tactique. Le premier tirera en premier, le second tirera ensuite si l'oiseau est encore en vie et de même pour le troisième. Un deuxième oiseau survient...
 - (a) Quelle est la probabilité qu'il soit abattu par le troisième chasseur ?
 - (b) Quelle est la probabilité que l'oiseau s'en sorte indemne ?

Exercice 5

Annie est cinéphile.

- Lorsqu'elle va voir un film, avec une probabilité de 0,6 elle le choisit d'après les critiques de son journal habituel.
- Elle estime que dans ce cas, elle passe une bonne soirée avec une probabilité de 0,85.
- Sinon elle passe une bonne soirée avec une probabilité de 0,75.
- Lorsqu'elle va voir un film avec des amis, elle passe une bonne soirée avec une probabilité de 0,90.
- Lorsqu'elle y va seule, elle passe une bonne soirée avec une probabilité de 0,70 .

1. Aujourd'hui elle va voir un film. Quelle est la probabilité qu'elle passe une bonne soirée?
2. Lorsqu'elle va voir un film, quelle est la probabilité qu'elle y aille avec des amis ? (en notant p cette probabilité, on pourra poser, puis résoudre, une équation simple vérifiée par p)
3. Mardi dernier elle est allée voir un film, qu'elle a aimé. Quelle est la probabilité qu'elle l'ait choisi en fonction des critiques?

Exercice 6

Un match de tennis masculin au tournoi de Roland-Garros se déroule en 3 sets gagnants: les joueurs disputent des sets jusqu'à ce que l'un d'entre eux en ait gagné trois. Celui-ci est alors déclaré vainqueur et le match se termine. On parle aussi de matchs en 5 sets, car il y a au maximum 5 sets disputés.

1. Lors d'un match vous estimez que votre joueur favori a une probabilité p (p étant un réel compris entre 0 et 1) de gagner chaque set. On supposera les sets indépendants les uns des autres. Calculer la probabilité
 - (a) que votre joueur favori gagne en 3 sets
 - (b) que la partie dure 3 sets
 - (c) que votre joueur favori gagne en 4 sets
 - (d) que la partie dure 4 sets.
2. Le match se termine en 4 sets. Quelle est la probabilité que votre joueur favori l'ait gagné? Commenter les cas où $p = 1/2$, $p = 0$ et $p = 1$.
3. On suppose maintenant que $p = 1/2$. Calculer
 - (a) la probabilité que la partie dure 5 sets
 - (b) la probabilité que votre joueur favori gagne en 5 sets
 - (c) l'espérance du nombre de sets disputés.

Exercice 7

1. Une urne A contient 5 boules indiscernables: 3 blanches et 2 noires. On tire simultanément 2 boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer:

- (a) exactement une boule blanche
 - (b) au moins une boule blanche
 - (c) deux boules de même couleur.
2. Une deuxième urne B contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On choisit au hasard une des deux urnes (avec une probabilité de 0.5 pour chaque) puis une boule dans cette urne.
- (a) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
 - (b) On tire une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne A ?
3. On choisit au hasard une des deux urnes (toujours avec une probabilité de 0.5 pour chaque) puis **deux** boules dans cette urne.
- (a) Calculer la probabilité de tirer deux boules noires.
 - (b) On tire deux boules noires. Quelle est la probabilité qu'elles proviennent de l'urne A ?

Exercice 8

Pour acheter un stock d'une certaine pièce d'équipement, un industriel s'adresse à deux fournisseurs A et B . Le fabricant A fournit 75% des besoins de l'industriel et son pourcentage de pièces défectueuses est 1%. Le pourcentage des pièces défectueuses fournit par B est de 2%. Le stock est constitué de sacs contenant des pièces provenant du même fournisseur. L'industriel prend une pièce au hasard dans son stock.

1. Quelle est la probabilité que la pièce soit défectueuse ?
2. Dans le cas où elle est bonne, quelle est la probabilité pour qu'elle provienne du fournisseur A ?
3. L'industriel constate qu'elle est défectueuse et s'exclame : "Elle provient probablement de B !" Quelle est le probabilité que ce jugement soit valable ?
4. L'industriel tire au hasard une deuxième pièce du même sac. Elle est de nouveau défectueuse. Notre industriel s'exclame : "Cette fois-ci il n'y plus aucun doute, ce sac provient de B!" Quelle est sa probabilité d'erreur ?

Exercice 9

Un réalisateur espère que son film sera projeté lors d'un festival. Les films sont sélectionnés de la manière suivante: 2 jurys composés respectivement de 3 et 4 personnes sont chargés de visionner les films candidats. La moitié des films sera jugée par le premier jury, l'autre moitié sera jugée par le second jury. Chacun des membres du jury donne son avis (favorable ou défavorable) et le film est sélectionné s'il recueille au moins 2 avis favorables.

Le réalisateur connaît bien les membres des jurys. Il estime que dans le premier un des membres a 30% de chances de donner un avis favorable, un autre 40% et le dernier 50%. Dans le second jury ces mêmes probabilités sont de 50%, 60%, 60% et 80%.

1. Supposons dans un premier temps que le film passe devant le premier jury.
 - (a) Quelle est la probabilité que le film ne recueille aucun avis favorable ?
 - (b) Quelle est la probabilité que le film soit sélectionné ?
2. Supposons maintenant que les films soient répartis au hasard entre les 2 jurys. Quelle est la probabilité que le film soit sélectionné ?
3. Le réalisateur apprend avec joie que son film est retenu. Quelle est la probabilité qu'il soit passé devant le premier jury ?

On prendra bien garde de rédiger et de justifier chaque réponse, et en particulier de bien préciser les événements considérés.

Exercice 10

Les résultats d'une enquête menée auprès d'une population, dont 52% sont des femmes et 48% des hommes, montrent que 80% des femmes et 70% des hommes de cette population interrogée jouent au moins une fois au Loto par mois.

1. On choisit un individu au hasard dans cette population. Tous les choix sont équiprobables.
 - a) Quelle est la probabilité que l'individu joue au moins une fois au Loto par mois?
 - b) L'individu joue au moins une fois au Loto par mois. Quelle est la probabilité qu'il soit un homme?
 - c) Quelle est la probabilité que l'individu soit un homme sachant qu'il joue moins d'une fois par mois au Loto?
2. On répète trois fois de manière indépendante l'expérience de la question 1 "choisir au hasard un individu de cette population".
 - a) Quelle est la probabilité qu'un et un seul de ces 3 individus joue au moins une fois au Loto par mois?
 - b) Quelle est la probabilité qu'au moins un des trois individus joue au moins une fois au Loto par mois?