

Exercices de TD- Feuille 5 (couples de variables/sommes doubles)

Exercice 1

On dispose de 4 boîtes numérotées de 0 à 3. La boîte numéro 3 contient 3 boules blanches, la boîte numéro 2 2 boules blanches et 1 boule noire, la boîte numéro 1 1 boule blanche et 2 boules noires et la boîte numéro 0 3 boules noires. On choisit une boîte au hasard et 2 boules dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte tirée et Y le nombre de boules blanches tirées. Trouver la loi de (X, Y) , puis celle de Y . Quel sera le signe de la covariance entre X et Y ? (on demande un raisonnement et non un calcul)

Exercice 2

Un sac contient sept jetons indiscernables au toucher, portant les numéros suivants : 0,1,1,1,2,2,3. On extrait sans remise deux jetons l'un à la suite de l'autre. On note X le résultat du premier tirage et Y le résultat du deuxième tirage.

1. Quelle est la loi du couple (X, Y) ?
2. Quelle est la loi marginale de X ? Quelle est la loi marginale de Y ?
3. Calculer les espérances de X et Y .

Exercice 3

Une entreprise fabrique des pièces d'usines. Parmi les pièces fabriquées, 90 % satisfont aux normes de qualité, 5 % ne satisfont pas à ces normes mais fonctionnent quand même et 5 % sont défectueuses. Pour essayer de connaître la fiabilité du fabricant, un client potentiel choisit au hasard 2 pièces. On appelle X le nombre de pièces défectueuses et Y le nombre de pièces aux normes.

1. Calculer la loi du couple (X, Y) et sa matrice de variance-covariance.
2. Trouver les lois de X et de Y , puis leurs espérances.
3. Retrouver ce dernier résultat en utilisant le principe de linéarité de l'espérance.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

Deux frères s'associent pour fonder une entreprise. Au bout d'un an, celle-ci emploie déjà 10 personnes: les 2 patrons, 3 employés et 5 ouvriers. Un journaliste s'intéressant à cette nouvelle entreprise décide d'interviewer 3 personnes au hasard. Soit X le nombre de patrons et Y le nombre d'ouvriers parmi ces 3 personnes interrogées.

1. Calculer la loi du couple (X, Y) et son coefficient de corrélation.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant la loi:

Y/X	-2	-1	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$

1. Trouver les lois de X et de Y , ainsi que leurs espérances.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Trouver la matrice de variance-covariance de (X, Y) . Que peut-on en conclure? (La matrice de variance-covariance de (X, Y) est simplement : $\begin{pmatrix} \text{var}(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \text{var}(Y) \end{pmatrix}$)
4. Trouver une relation entre X et Y .

Exercice 6

Soit X et Y 2 variables aléatoires indépendantes d'écart-types 4 d'espérance 10. Calculer $\text{cov}(3X + Y - 5, 5X + Y - 1)$.

Exercice 7

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X \backslash Y$	0	1
0	a	$1/6$
1	$1/12$	$1/6$
2	$1/6$	b

1. Quelle condition doivent vérifier a et b ?
2. Montrer qu'il existe une valeur unique de a et une valeur unique de b pour lesquelles X et Y sont indépendants et les déterminer.
Dans la suite de cet exercice on supposera $a = 1/12$ et $b = 1/3$.
3. Calculer $P(X < Y)$.
4. On pose $Z = X + Y$.
 - (a) Calculer le plus simplement possible l'espérance et la variance de Z .
 - (b) Donner la loi conditionnelle de Z , liée par la condition $Y = 0$.
 - (c) Donner la loi conditionnelle de Z , liée par la condition $Y = 1$.
 - (d) Donner la loi de Z , et retrouver le résultat du a).

Exercice 8 (Du danger des mariages...)

Le tableau suivant donne les statistiques de 1980 sur le nombre de mariages et de décès enregistrés dans les 50 états américains.

	Nb de mariages			
	[0,10[	[10,50[	[50,100[	[100,250[
Nb de décès				
[0,10[	9	4	0	1
[10,50[	0	20	6	0
[50,100[	0	1	3	0
[100,250[	0	0	1	5

- On ne considère que le nombre de décès.
 - Déterminer la moyenne.
 - Déterminer la variance empirique.
- Pour le nombre de mariages
 - Tracer le diagramme représentant les fréquences cumulées.
 - Déterminer la médiane à l'aide d'une interpolation linéaire.
- Pour les 2 variables, déterminer la covariance, puis le coefficient de corrélation. Comment expliquer ce résultat ?

Exercice 9

Le tableau de données ci-contre représente les notes attribuées par deux juges à dix sportifs lors d'une compétition.

Sportif	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Note du juge 1 (X)	72	65	80	84	74	68	82	68	76	71	740
Note de juge 2 (Y)	76	63	84	87	79	69	81	71	73	77	760
Carré de la note du juge 1	5184	4225	6400	7056	5476	4624	6724	4624	5776	5041	55130
Carré de la note du juge 2	5776	3969	7056	7569	6241	4761	6561	5041	5329	5929	58232
Produit des deux notes	5472	4095	6720	7308	5846	4692	6642	4828	5548	5467	56618

- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les deux notes et le commenter.
- La note finalement retenue sera la moyenne des notes des deux juges. Exprimer le coefficient de corrélation linéaire entre cette moyenne et X en fonction de $Cov(X, Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$. Donner une valeur approchée de ce coefficient. Comparer ce résultat avec le précédent et commenter.
- Si le juge 2, se trouvant trop généreux, baisse toutes ses notes de 4 points alors que le juge 1, se trouvant trop sévère, augmente toutes ses notes de 2 points, comment évoluent les deux résultats précédents ?
- Un journaliste interroge 3 de ces sportifs après la compétition. En supposant qu'ils sont choisis au hasard, calculer la probabilité qu'au moins deux d'entre eux aient une note finale (la moyenne des notes des deux juges) supérieure à 80.

Indice: On rappelle que $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$.

Exercice 10

Le tableau suivant donne l'espérance de vie x (en années) et le P.N.B. par habitants (y en centaine de dollars) de 65 pays (année 1998, source: banque mondiale).

	y_j	$]0 ; 7,6]$	$]7,6 ; 93,8]$	$]93,8 ; 399,8]$	Somme	$\sum x_i n_{ij}$	$\sum x_i^2 n_{ij}$	$\sum x_i y_j n_{ij}$
x_i	centres	3,8	50,7	246,8				
$]50 ; 60]$	55	1	0	0	1	55	3025	209
$]60 ; 70]$	65	4	16	0	20	1300	84500	53716
$]70 ; 75]$	72,5	2	20	2	24	1740	126150	109852
$]75 ; 80]$	77,5	0	1	19	20	1550	120125	367342,25
Somme		7	37	21	65	4645	333800	531119,25
$\sum y_j n_{ij}$		26,6	1875,9	5182,8	7085,3			
$\sum y_j^2 n_{ij}$		101,08	95108,13	1 279 115	1 374 324,25			
$\sum x_i y_j n_{ij}$		1748	130172,25	399199	531119,25			

Les 4 dernières lignes et les 4 dernières colonnes donnent des calculs intermédiaires fort utiles (n_{ij} représentent l'effectif pour $x = i$ et $y = j$; dans les calculs les classes sont remplacées par leur centre chaque fois que cela est nécessaire). Vous pouvez choisir de les ignorer, mais vous risquez de perdre du temps!

1. On ne considère que le P.N.B. par habitant. Tracer rapidement le diagramme représentant les fréquences cumulées, puis trouver la médiane par la méthode de l'interpolation linéaire.
2. On passe maintenant à l'espérance de vie. Déterminer la moyenne (ou espérance empirique) et la variance empirique.
3. Pour les 2 variables, déterminer la covariance, puis le coefficient de corrélation. Quel commentaire peut-on faire ?

Calcul de sommes doubles

Rappel:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

et

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 11

Calculer les sommes suivantes:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij, S_2 = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{200} (i+j)^2, S_3 = \sum_{i=2}^{100} \sum_{j=1}^{200} (i+j)^2.$$

Exercice 12

Calculer en fonction de n

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+2j-1) \text{ puis } \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n (i+2j-1).$$