
UE SA03U050

**Corrigé de l'épreuve de Mathématiques
appliquées aux sciences 3**

NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Document et/ou matériel autorisés : AUCUN

Durée totale de l'épreuve : 1h30

- Le sujet comporte 12 pages (page de garde et de complément de réponse incluses).
- La réponse à chaque question devra être rédigée sur ce cahier-réponses, dans le cadre prévu à cet effet. Si nécessaire, la copie de couverture pourra être utilisée comme complément de réponse, à condition de bien préciser le numéro de l'exercice et de la question et d'indiquer le report au niveau de la case correspondante.
- On prendra soin de faire apparaître les étapes intermédiaires principales des calculs dans les réponses données.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

On souhaite équilibrer la réaction chimique suivante : $x\text{NO}_2 + y\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons z\text{HNO}_3 + u\text{NO}$.

Les équations de conservation de la matière appliquées à chaque espèce chimique conduisent au système d'équations suivant :

$$(S) : \begin{cases} x - z - u = 0 \\ 2x + y - 3z - u = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S) par la méthode de Gauss, en tenant compte du fait que les inconnues doivent être strictement positives.

On choisit la ligne 1 comme ligne pivot, que l'on va utiliser pour éliminer x sur la ligne 2, soit :

$$\begin{cases} x - z - u = 0 \\ 2x + y - 3z - u = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z - u = 0 \\ y - z + u = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

On choisit ensuite la ligne 2 comme ligne pivot, que l'on va utiliser pour éliminer y sur la ligne 3 :

$$\begin{cases} x - z - u = 0 \\ y - z + u = 0 \\ z - 2u = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2u \\ y - 2u + u = 0 \\ x - 2u - u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2u \\ y = u \\ x = 3u \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3u \\ y = u \\ z = 2u \end{cases}}$$

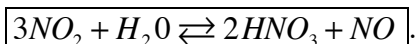
D'où finalement : $S = \{(3u; u; 2u; u) \mid u \in \mathbb{R}^{+*}\}$.

2. Pour équilibrer l'équation, on cherche le jeu de valeurs tel que les inconnues soient des entiers les plus petits possibles. Donner ce jeu de valeurs et en déduire l'équation rendant compte de l'équilibre chimique.

La plus petite valeur de u permettant d'avoir des coefficients stoechiométriques entiers et positifs est $u = 1$, d'où le jeu de valeurs :

$$\boxed{x = 3; y = 1; z = 2; u = 1}$$

et l'équation de réaction équilibrée :



Exercice 2

Une population de libellules occupe deux étangs. Chaque jour 20% des individus de l'étang A migrent vers l'étang B et 30% des individus de l'étang B migrent vers l'étang A.

En notant a_t et b_t la proportion de libellules respectivement dans les étangs A et B au jour t , nous avons au jour $t + 1$:

$$\begin{cases} a_{t+1} = 0,8a_t + 0,3b_t \\ b_{t+1} = 0,2a_t + 0,7b_t \end{cases} \text{ soit encore : } \begin{pmatrix} a_{t+1} \\ b_{t+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}.$$

1. Donner la matrice T associée à ce système, puis déterminer son inverse T^{-1} .

La matrice T est donnée par : $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de la matrice T est : $\det T = 0,8 \times 0,7 - 0,2 \times 0,3 = 0,56 - 0,06 = \underline{0,50}$.

On a $\det T \neq 0 \Rightarrow$ la matrice T est inversible. Son inverse est donnée par la formule vue en cours :

$$T^{-1} = \frac{1}{0,5} \begin{pmatrix} 0,7 & -0,3 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0,7 & -0,3 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 & -0,6 \\ -0,4 & 1,6 \end{pmatrix}.$$

2. Si la population est répartie au jour 2 de manière à ce que 80% des libellules soient dans l'étang A, quelle était la répartition au jour 1 dans les deux étangs ?

Au jour 2, le vecteur d'état est : $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ puisque 80% sont dans l'étang A.

On cherche ici la répartition de la population au jour 1 connaissant celle au jour 2. On a :

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \text{ soit en multipliant par } T^{-1} \text{ à gauche : } T^{-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = T^{-1} T \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0,7 & -0,3 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0,7 \times 0,8 - 0,3 \times 0,2 \\ -0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Au jour 1, toutes les libellules étaient dans l'étang A.

3. Un équilibre est atteint lorsque quel que soit t : $\begin{pmatrix} a_{t+1} \\ b_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$. Notons $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ le vecteur d'état stationnaire, satisfaisant la relation : $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Interpréter cette relation en termes de valeurs propres et de vecteurs propres, puis déterminer les valeurs de a et b .

* $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ signifie que la matrice T admet la valeur propre $\lambda = 1$, avec pour vecteur propre le vecteur d'état $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, nommé vecteur d'état stationnaire.

Remarque : comme toutes les matrices de transition, la matrice T admet un vecteur d'état stationnaire ainsi que la valeur propre $\lambda = 1$ qui lui est associée.

$$* T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (T - I) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Avec : } T - I = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,3 \\ 0,2 & -0,3 \end{pmatrix}, \text{ on obtient :}$$

$$\begin{pmatrix} -0,2 & 0,3 \\ 0,2 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,2a + 0,3b = 0 \\ 0,2a - 0,3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0,2a - 0,3b = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}b}.$$

$$* \text{ Par ailleurs, le vecteur d'état stationnaire vérifie } a + b = 1, \text{ soit : } \frac{3}{2}b + b = 1 \text{ d'où : } \boxed{b = \frac{2}{5} = 0,4}.$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{a = \frac{3}{5} = 0,6}.$$

$$\text{Le vecteur d'état stationnaire est donc : } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie qu'à long terme, 60% des libellules seront dans l'étang A tandis que 40% seront dans l'étang B.

Exercice 3

On veut étudier l'évolution d'une population de mammifères. On modélise cette évolution en faisant les hypothèses qui suivent. La population est structurée en trois classes d'âge : les jeunes qui ont moins de 10 ans, les adultes entre 10 et 20 ans et les individus âgés de plus de 20 ans. Jusqu'à 30 ans la mortalité est négligeable, puis une fois l'âge de 30 ans atteint, tous les individus meurent rapidement. Seuls les adultes se reproduisent : entre 10 et 20 ans, on estime que chaque individu femelle donne naissance à 8 jeunes (on suppose qu'il y a autant de mâles que de femelles dans la population). On observe la population sur des intervalles de 10 ans. On note x_n , y_n et z_n les effectifs respectifs des jeunes, des adultes en âge de se reproduire et des individus âgés de plus de 20 ans, à l'année $10n$ (l'année 0 étant choisie comme départ de l'observation). Par exemple, y_3 est égal au nombre d'individus adultes entre 10 et 20 ans, au bout de 30 années.

La matrice A qui modélise l'évolution des trois classes d'âge de la population entre l'année $10n$ et l'année $10(n+1)$ s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. La matrice A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre évidente de la matrice A .

Pour savoir si la matrice A est inversible, on calcule son déterminant.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ car la dernière colonne est constituée uniquement de 0.}$$

On en conclut que la matrice A n'est pas inversible et qu'elle admet la valeur propre $\lambda_0 = 0$ (propriété vue en cours).

2. Montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 4)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de la matrice A et leur multiplicité.

* Par définition, le polynôme caractéristique de A est : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$

En développant par rapport à la dernière colonne : $P_A(\lambda) = (-1)^{3+3}(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 4).$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 4)}.$$

* Les valeurs propres de la matrice A sont les racines de son polynôme caractéristique, soit les solutions de l'équation : $P_A(\lambda) = 0$.

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \pm 2}.$$

La matrice A admet donc 3 valeurs propres simples : $\boxed{\lambda_0 = 0 ; \lambda_+ = 2 ; \lambda_- = -2}$.

3. Déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à chaque valeur propre de la matrice A .

On cherche les vecteurs propres $Y \neq \mathbf{0}$ tels que $AY = \lambda Y \Leftrightarrow (A - \lambda I) Y = \mathbf{0}$.

* Pour la valeur propre $\lambda_0 = 0$:

$$(A - \lambda_0 I) Y = \mathbf{0} \Leftrightarrow AY = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

d'où l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_0 = 0$:

$$\boxed{\{Y_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}^* \right\}}$$

$$(\text{ou si l'on tient compte du fait qu'il s'agit de populations : } \{Y_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{N}^* \right\}).$$

* Pour la valeur propre $\lambda_+ = 2$:

$$(A - \lambda_+ I) Y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - 2I) Y = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 2z \end{cases}$$

d'où l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_+ = 2$:

$$\{Y_+\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}^* \right\}$$

(ou si l'on tient compte du fait qu'il s'agit de populations : $\{Y_+\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{N}^* \right\}$).

* Pour la valeur propre $\lambda_- = -2$:

$$(A - \lambda_- I) Y = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A + 2I) Y = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = -2z \end{cases}$$

d'où l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_- = -2$:

$$\{Y_-\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}^* \right\}$$

(en termes de populations, la valeur propre $\lambda_- = -2$ n'a pas de sens).

Partie B

1. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que cette matrice est inversible et calculer son inverse P^{-1} par la méthode de votre choix.

$$* \det P = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{la matrice } P \text{ est inversible.}}$$

* Pour inverser P , on peut utiliser la méthode de Cramer : $P^{-1} = \frac{1}{\det P} (Com P)^T$.

Calculons la comatrice de P :

$$Com P = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$P^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -16 \\ -2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque : on peut vérifier que $P^{-1}P = I$.

2. Calculer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$. Que peut-on dire de cette matrice ?

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice D est une matrice diagonale.

Les valeurs apparaissant sur sa diagonale sont ses valeurs propres.