

Exercice 1

12 points

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

— les tirs à deux points.

Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.

— les tirs à trois points.

Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.
- Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35 % sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir.

On considère les événements suivants :

D : « Il s'agit d'un tir à deux points ».

R : « le tir est réussi ».

- Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
- Calculer la probabilité $P(\overline{D} \cap R)$.
- Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à 0,4125.
- Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

2. Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

- Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
- Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- Déterminer la probabilité que Stéphanie réussisse exactement 3 tirs. Arrondir le résultat au centième.
- Déterminer la probabilité que Stéphanie réussisse au moins 6 tirs. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit n un entier naturel non nul.

Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 2**11 points**

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

- a. Calculer v_0 .
 - b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - c. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

- a. Calculer w_0 .
 - b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .
 - c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
 - d. Exprimer w_n en fonction de n .
4. Montrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 3

12 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (-4x^2 + 5) e^{-x} + 3$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. a. Démontrer que pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = (4x^2 - 8x - 5) e^{-x}.$$

- b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. a. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = -\frac{4x^2}{e^x} + \frac{5}{e^x} + 3$.

- b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$).

- c. Interpréter graphiquement cette limite.

3. À l'aide des questions 1. et 2., dresser le tableau de variation de la fonction f .

4. Justifier que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

5. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie B

Soit F une primitive sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction f .

1. Quelle est l'expression de F'' la dérivée seconde de F sur $[0 ; +\infty[$?
2. En déduire sur quel intervalle F est convexe.
3. La courbe représentative de F admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées.

Exercice 4

5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On peut affirmer que :

- | | |
|--|--|
| a. la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. | b. la suite (u_n) diverge vers $-\infty$. |
| c. la suite (u_n) n'a pas de limite. | d. la suite (u_n) converge. |
2. On considère la suite (a_n) ainsi définie :

$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}.$$

Pour tout entier naturel n , on a :

- | | |
|--|---|
| a. $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2$ | b. $a_n = -\frac{2}{3^n} + 4$ |
| c. $a_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ | d. $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$ |

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -7xe^x.$$

Cette fonction admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée f' et une dérivée seconde f'' .

On la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .

- | | |
|---|--|
| a. f' est positive sur l'intervalle $[-6 ; 0]$ | b. f est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 0]$ |
| c. $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion pour $x = -1$ | d. f'' change de signe en $x = -2$. |
4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

La courbe $\mathcal{C}_g$ admet :

- | | |
|---|--|
| a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale. | b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale. |
| c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale. | d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale. |
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{x^2+1}.$$

Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f . Pour tout réel x , on a :

a. $F(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2+1}$

c. $F(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$

b. $F(x) = (1 + 2x^2) \mathrm{e}^{x^2+1}$

d. $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}$