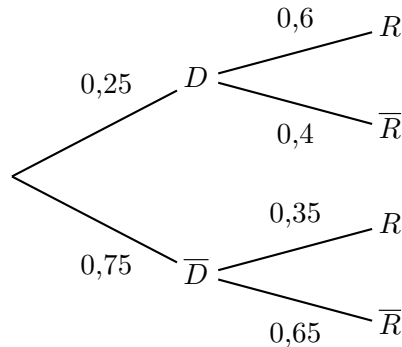


Exercice 1

12pts

1. 2 pts

a.



b. 1pt dont 0.5 pour la formule

$$P(\overline{D} \cap R) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = 0,2625.$$

c. 2pts dont 0.5 pour formule des probabilités totales et 0.5 pour les expressions mathématiques correctes

$$\text{On a de même } P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15.$$

D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers.

Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R) = 0,15 + 0,2625 = 0,4125.$$

d. 1pt dont 0.5 pour la formule

$$\text{Il faut trouver } P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \frac{0,2625}{0,4125} \approx 0,6364, \text{ soit } 0,64 \text{ au centième près.}$$

2. a. 2pts dont 0.5 pour "identiques et indépendantes"

On reconnaît un schéma binomial.

Épreuve : un tir au panier.

Succès : réussir le tir avec une probabilité $p = 0,35$

La variable aléatoire X est égale au nombre de réussites après 10 tirs identiques et indépendants, elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

$$\text{Donc } \forall k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket \quad P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,35^k \times 0,65^{10-k}$$

b. 1pt dont 0.5 pour la formule

On a $E(X) = np = 10 \times 0,35 = 3,5$: en moyenne sur 10 tirs Stéphanie en réussira entre 3 et 4.

c. 1pt

$$\text{On a } P(X = 3) \approx 0,25.$$

d. 1pt

$$\text{On a de même } P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0,91.$$

3. 1pt dont 0.5 pour la formule/le calcul

La probabilité de rater n tirs à 3 points est égale à $P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0,35^0 \times 0,65^n = 0,65^n$, donc d'en réussir au moins un est $1 - 0,65^n$.

$$1 - 0,65^{10} \approx 0,987 \text{ et } 1 - 0,65^{11} \approx 0,991$$

Donc le plus petit naturel solution est donc 11 : Stéphanie doit tenter 11 tirs.

Exercice 2**11pts****1. 1pt**

D'après la définition $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

2. a. 1pt

$$v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1.$$

b. 1pt dont 0.5 pour le $\forall n$, on le pénalise une seule fois dans le sujet On a pour tout naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c. 1pt

On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

3. a. 1pt

$$w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1.$$

b. 1pt

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}.$$

c. 1pt

On a par définition $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_n}{v_n} = w_n$, donc l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$w_{n+1} = 2 + w_n.$$

d. 1pt

L'égalité précédente montre que la suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme -1 et de raison 2 .

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0 + n \times 2 = -1 + 2n$.

4. 1pt

On a trouvé que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 2n - 1 = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n$.

Donc $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$, car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

5. 2pts dont 0.5 pour l'initialisation et 0.5 pour la rédaction globale

Démonstration par récurrence :

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n : \ll S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n} \gg$

- Initialisation : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$. La formule est vraie au rang 0.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

Supposons P_n vraie et démontrons que P_{n+1} est vraie

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\ &= 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \quad \text{par H.R.} \\ &= 2 + \frac{-4n-6+2n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 3

12pts

Partie A

1. a. 1pt dont 0.5 pour dérivable

La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -8xe^{-x} + (-4x^2 + 5)(-e^{-x}) \\ &= (-8x - (-4x^2 + 5))e^{-x} \\ &= (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}, \quad \forall x \in [0 ; +\infty[.$$

b. 1pt

La fonction exponentielle étant toujours positive, f' est du signe de $4x^2 - 8x - 5$.

Cherchons à résoudre $4x^2 - 8x - 5 = 0$.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-5) \\ &= 144 > 0 \text{ donc il y a deux solutions réelles à cette équation.}\end{aligned}$$

Les solutions sont donc : $x_1 = \frac{8-12}{2 \times 4}$ et $x_2 = \frac{8+12}{2 \times 4}$ Puisque $x \mapsto 4x^2 - 8x - 5$
 $x_1 = -0,5$ et $x_2 = 2,5$.
 est représentée par une parabole et que son coefficient dominant est positif), on a le tableau de signe suivant pour f' .

x	0	2,5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

2. a. 1pt

Soit $x \in [0 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned}f(x) &= (-4x^2 + 5)e^{-x} + 3 \\ &= \frac{-4x^2 + 5}{e^x} + 3 \\ &= -\frac{4x^2}{e^x} + \frac{5}{e^x} + 3.\end{aligned}$$

Donc, $\forall x \geq 0$,

$$f(x) = -\frac{4x^2}{e^x} + \frac{5}{e^x} + 3.$$

b. 1pt

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4x^2}{e^x} = 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{e^x} = 0$.

Donc par limite de somme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

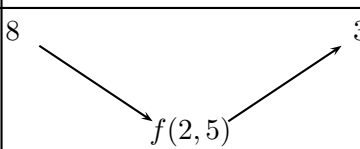
c. 1pt

De la limite précédente, on peut déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $+\infty$.

3. 1pt

Des questions précédentes, on peut déduire le tableau de variation de la fonction f .

x	0	2,5	$+\infty$
$f(x)$	8	$f(2,5)$	3


4. 2pt

Sur l'intervalle $[0 ; 2,5]$,

- la fonction f est dérivable donc continue et strictement décroissante ;

- $f(0) > 5 > f(2, 5)$ (car $f(2, 5) \simeq 1, 4$).

Donc, d'après le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2, 5]$.

Sur l'intervalle $[2, 5; +\infty[$, la fonction f est strictement croissante et a pour limite 3. Donc, pour tout $x \geq 2, 5$, $f(x) < 3$.

Finalement, l'équation $f(x) = 5$ admet bien une unique solution sur $[0; +\infty[$.

5. 1pt

A l'aide de la calculatrice, on trouve que $\alpha \simeq 0,59$.

Partie B

Soit F une primitive sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction f .

1. 1pt

Quelle est l'expression de F'' la dérivée seconde de F sur $[0 ; +\infty[$? Pour $x \in [0 ; +\infty[$, $F'(x) = f(x)$ donc $F''(x) = f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}$

2. En déduire sur quel intervalle F est convexe. D'après la question 1.b de la partie A, $f'(x) > 0$ si et seulement si $x \in]2,5 , +\infty[$.

Donc F est convexe sur cet intervalle : $]2,5 , +\infty[$

3. 1pt

La courbe représentative de F admet-elle un point d'inflexion? Si oui, donner son abscisse.

La courbe représentative de F admet un point d'inflexion d'abscisse 2,5.

Exercice 4

5pts

1pt par réponse juste

1.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc puisque $n+1 \geq 1 > 0$ et que $\frac{1}{n+1} > 0$, on en déduit que pour tout naturel :

$$-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

La suite (u_n) encadrée par deux suites ayant pour limite 0 a pour limite 0.

2.

$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}.$$

Soit la suite (b_n) définie pour tout naturel n par $b_n = a_n + \alpha$.

$$\text{Alors } b_{n+1} = a_{n+1} + \alpha = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3} + \alpha = \frac{1}{3}(b_n - \alpha) + \frac{8}{3} + \alpha = \frac{1}{3}b_n - \frac{\alpha}{3} + \frac{8}{3} + \alpha = \frac{1}{3}b_n + \frac{8+2\alpha}{3}.$$

Prenons $\alpha = -4$, alors $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$: cette égalité montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = a_0 + \alpha = 2 - 4 = -2$.

On sait qu'alors que, quel que soit le naturel n , $b_n = b_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Finalement $b_n = a_n - 4 \iff a_n = 4 + b_n = 4 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -7xe^x.$$

Cette fonction admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée f' et une dérivée seconde f'' .

On la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .

- a. f' est positive sur l'intervalle $[-6 ; 0]$ b. f est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 0]$
c. $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion pour $x = -1$ d. f'' change de signe en $x = -2$.

Pour $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (-7x - 7)e^x$ et $f''(x) = (-7x - 14)e^x$;
 $f''(x)$ s'annule et change de signe quand $x = -2$.

4.

$$g(x) = \frac{e^x}{x}.$$

- Au voisinage de zéro : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$: géométriquement l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_g$.
- Au voisinage de plus l'infini : on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, donc pas d'asymptote.

5.

$$f(x) = xe^{x^2+1}.$$

En posant $u(x) = x^2 + 1$, on a $u'(x) = 2x$ et l'on peut écrire $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2+1} = \frac{1}{2}u'e^u$: on reconnaît la dérivée de $\frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{x^2+1}$.

Donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+1}$.