

EXERCICE N° 1 : (5 pts)

$$\text{a) } \frac{x+1}{2x-3} + 1 \geq \frac{-x-4}{-x+5}$$

$$\text{Conditions d'existence de l'inéquation : } \begin{cases} 2x-3 \neq 0 \\ -x+5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3}{2} \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{2x-3} + 1 - \frac{-x-4}{-x+5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x+5) + 1(2x-3)(-x+5) - (-x-4)(2x-3)}{(2x-3)(-x+5)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 5x - x + 5 - 2x^2 + 10x + 3x - 15 - (-2x^2 + 3x - 8x + 12)}{(2x-3)(-x+5)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 5x - x + 5 - 2x^2 + 10x + 3x - 15 + 2x^2 - 3x + 8x - 12}{(2x-3)(-x+5)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow Q(x) = \frac{-x^2 + 22x - 22}{(2x-3)(-x+5)} \geq 0$$

Déterminons si le trinôme du second degré possède des racines réelles :

$$\Delta = 22^2 - 4 \times (-1) \times (-22) = 484 - 88 = 396 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 6\sqrt{11}$$

$$x_1 = \frac{-22 + 6\sqrt{11}}{-2} = 11 - 3\sqrt{11} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-22 - 6\sqrt{11}}{-2} = 11 + 3\sqrt{11}$$

x	$-\infty$	x_1	1,5	5	x_2	$+\infty$		
$-x^2 + 22x - 22$								
$2x - 3$								
$-x + 5$								
$Q(x)$								

$$Q(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 11 - 3\sqrt{11}] \cup \left] \frac{3}{2} ; 5 \right[\cup [11 + 3\sqrt{11} ; +\infty[$$

b) Factorisons les deux trinômes du 2nd degré $-x^2 + 5x - 4$ et $3x^2 + x - 4$
Ces deux trinômes admettent $x_1 = 1$ comme racine évidente, d'où, grâce au produit des

racines qui vaut $\frac{c}{a}$, on obtient :

- pour le 1^{er} trinôme : $x_1 \times x_2 = \frac{-4}{-1} = 4 \Leftrightarrow 1 \times x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4$

- pour le 2^e trinôme : $x_1 \times x_2 = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 1 \times x_2 = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{4}{3}$.

D'où la factorisation :

- pour le 1^e trinôme : $-(x-1)(x-4)$
- pour le 2^e trinôme : $3(x-1)\left(x+\frac{4}{3}\right) = (x-1)(3x+4)$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{x-2}{5x-x^2-4} &< \frac{-2x+3}{3x^2+x-4} \Leftrightarrow \frac{x-2}{5x-x^2-4} - \frac{-2x+3}{3x^2+x-4} < 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{x-2}{-(x-1)(x-4)} - \frac{-2x+3}{(x-1)(3x+4)} &< 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(3x+4) - (-2x+3)(-1)(x-4)}{-(x-1)(x-4)(3x+4)} < 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{3x^2+4x-6x-8 + (-2x+3)(x-4)}{-(x-1)(x-4)(3x+4)} &< 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2+4x-6x-8-2x^2+8x+3x-12}{-(x-1)(x-4)(3x+4)} < 0 \\
 \Leftrightarrow Q(x) = \frac{x^2+9x-20}{-(x-1)(x-4)(3x+4)} &< 0
 \end{aligned}$$

Déterminons les racines du trinôme :

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 81 + 80 = 161 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{161}$$

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{161}}{2} \approx 1,84 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{161}}{2} \approx -10,84$$

x	$-\infty$	x_2	$-4/3$	1	x_1	4	$+\infty$
$x^2 + 9x - 20$	+	o	-	-	-	o	+
$x - 1$	-	-	-	o	+	+	+
$3x + 4$	-	-	o	+	+	+	+
$-x + 4$	+	+	+	+	+	o	-
$Q(x)$	+	o	-	+	-	o	-

$$Q(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{-9 - \sqrt{161}}{2} ; -\frac{4}{3} \right[\cup \left] 1 ; \frac{-9 + \sqrt{161}}{2} \right[\cup \left] 4 ; +\infty \right[$$

EXERCICE N° 2 : (3 pts)

a)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^4 - 11x^2 + 1}{3x^4 - 7x + 2}$$

Le calcul amène la forme indéterminée : « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

La fonction h étant rationnelle, on factorise numérateur et dénominateur par les termes de

plus haut exposant :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(9 - \frac{11}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left(3 - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9 - \frac{11}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{3 - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4}}$$

On a alors successivement :

- *Au numérateur*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty, \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{11}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = 0, \text{ par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(9 - \frac{11}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = 9$$

- *Au dénominateur*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty, \text{ par quotient } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{7}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^4} = 0, \text{ par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right) = 3$$

Finalement par quotient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 2}{11x^3 + x + 3}$$

Le calcul amène la forme indéterminée : « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Au voisinage des infinis, la fonction rationnelle se comporte comme le quotient de ses termes de plus grand exposant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 2}{11x^3 + x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{11x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{11x}$.

On a alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 11x = +\infty$, par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{11x} = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0^-$

b) On déduit que h et k admettent une asymptote horizontale d'équations $y = 3$ et $y = 0$.

EXERCICE N° 3 : (4 pts)

- $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$

La fonction f est une fonction irrationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble définition, **sous réserve** pour les valeurs qui annulent le radicande.

$$f(x) = \sqrt{(2x-1)(2x+1)}$$

$x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$ sont les racines du trinôme du second degré $4x^2 - 1$.

$$4x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty ; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$$

- $\text{Dérivabilité en } x_0 = -\frac{1}{2}$ (à gauche de $-\frac{1}{2}$)

Déterminons, pour tout réel **strictement négatif** h : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f\left(-\frac{1}{2} + h\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{\sqrt{4\left(-\frac{1}{2} + h\right)^2 - 1} - 0}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{\sqrt{4\left(\frac{1}{4} - h + h^2\right)} - 1}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{\sqrt{1 - 4h + 4h^2} - 1}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{\sqrt{-4h + 4h^2}}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{\sqrt{4h^2\left(-\frac{1}{h} + 1\right)}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{\textcircled{2h}\sqrt{-\frac{1}{h} + 1}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \left(-2\sqrt{-\frac{1}{h} + 1}\right)$$

car $h < 0$

On a successivement :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} h = 0^-, \text{ par quotient } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{1}{h} = -\infty, \text{ par produit } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \left(-\frac{1}{h}\right) = +\infty, \text{ par somme}$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \left(-\frac{1}{h} + 1\right) = +\infty, \text{ par composée } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \sqrt{-\frac{1}{h} + 1} = +\infty, \text{ finalement par produit}$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \left(-2\sqrt{-\frac{1}{h} + 1}\right) = -\infty. \quad \text{La fonction n'est donc pas dérivable en } -\frac{1}{2}.$$

- Dérivabilité en $x_0 = \frac{1}{2}$ (à droite de $\frac{1}{2}$)

Déterminons, pour tout réel **strictement positif** h : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{4\left(\frac{1}{2} + h\right)^2} - 1 - 0}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{4h + 4h^2}}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{4h^2\left(\frac{1}{h} + 1\right)}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{2h\sqrt{\frac{1}{h} + 1}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} 2\sqrt{\frac{1}{h} + 1} \end{aligned}$$

De manière analogue comme précédemment, on obtient : $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} 2\sqrt{\frac{1}{h} + 1} = +\infty$,

La fonction n'est donc pas dérivable en $x_0 = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, le domaine de dérivabilité de la fonction f est :

$$x \in \left] -\infty ; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 1} = (4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

f est du type u^n dont la dérivée est $nu'u^{n-1}$ avec :

$$\begin{cases} u(x) = 4x^2 - 1 \Rightarrow u'(x) = 8x \\ n = \frac{1}{2} \Rightarrow n - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{d'où : } f'(x) = \frac{1}{2}(8x)(4x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = 4x(4x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4x}{(4x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

Finalement : $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$

$$\bullet \quad g(x) = 2(-7x^5 + 4x - 9)^3$$

g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

g est du type λu^n dont la dérivée est $\lambda n u' u^{n-1}$ avec :

$$\begin{cases} u(x) = -7x^5 + 4x - 9 \Rightarrow u'(x) = -35x^4 + 4 \\ n = 3 \Rightarrow n - 1 = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } g'(x) = 2 \times 3(-35x^4 + 4)(-7x^5 + 4x - 9)^2$$

Finalement :
$$g'(x) = 6(-35x^4 + 4)(-7x^5 + 4x - 9)^2$$

$$\bullet \quad h(x) = \frac{-5x^2 - 4x + 7}{2x + 1}$$

La fonction h est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur son ensemble de

définition : $D_h = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

h est du type $\frac{u}{v}$ dont la dérivée est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec

$$\begin{cases} u(x) = -5x^2 - 4x + 7 \Rightarrow u'(x) = -10x - 4 \\ v(x) = 2x + 1 \Rightarrow v'(x) = 2 \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$h'(x) = \frac{(-10x - 4)(2x + 1) - 2(-5x^2 - 4x + 7)}{(2x + 1)^2} = \frac{-20x^2 - 10x - 8x - 4 + 10x^2 + 8x - 14}{(2x + 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-10x^2 - 10x - 18}{(2x + 1)^2}$$

EXERCICE N° 4 : (4 pts)

$$f(x) = -3x^2 + 5x + 1$$

a) Calculons le taux de variation de f entre a et $a+h$:

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-3(a+h)^2 + 5(a+h) + 1 - (-3a^2 + 5a + 1)}{h}$$

$$\tau_a(h) = \frac{-3(a^2 + 2ah + h^2) + 5a + 5h + 1 + 3a^2 - 5a - 1}{h} = \frac{-3a^2 - 6ah - 3h^2 + 5h + 3a^2}{h}$$

$$\tau_a(h) = \frac{-6ah - 3h^2 + 5h}{h} = \frac{h(-6a - 3h + 5)}{h} \quad \text{donc} \quad \tau_a(h) = -3h - 6a + 5$$

b) On a $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = -6a + 5$ donc la fonction est dérivable en tout point d'abscisse a .

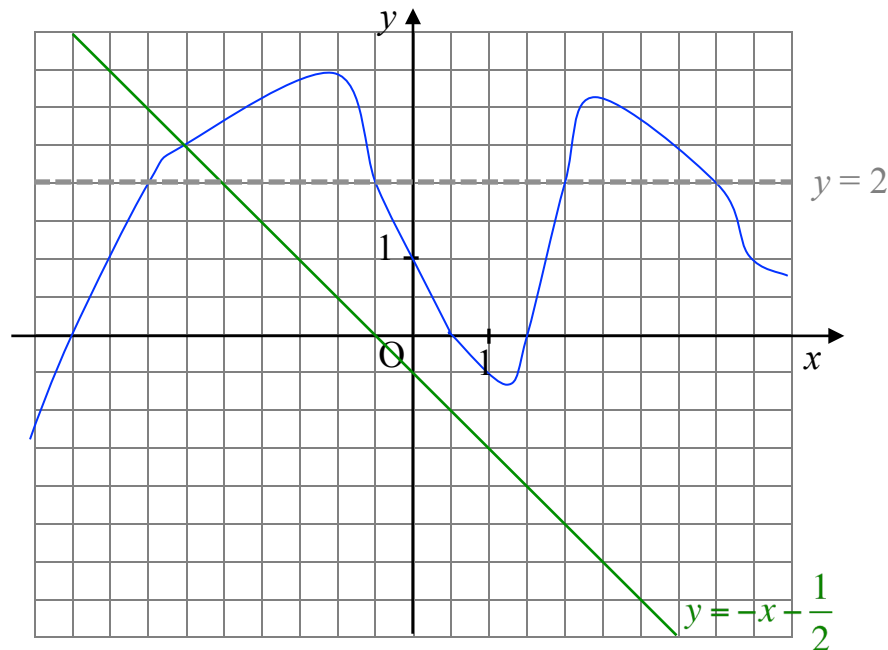
c) Or, $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = f'(a)$ donc $f'(a) = -6a + 5$

d) $f'(5) = -6 \times 5 + 5 = -30 + 5$ donc $f'(5) = -25$

De manière générale, $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

EXERCICE N° 5 : (2 pts)

a) $f(-3) = 2,5$ $f(0) = 1$



Donnons les abscisses des points de la courbe ayant une ordonnée nulle, ce sont les

racines : $f(-4,5) = f(0,5) = f(1,5) = 0$;

Donnons les abscisses des points de la courbe ayant une ordonnée égale à 2 :

$$f(-3,5) = f(-0,5) = f(2) = f(4) = 2.$$

b) Donnons les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieure aux ordonnées des points de la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$. Cela se produit lorsque la courbe est au-dessus de la droite : $x \in]-3 ; +\infty[$.

EXERCICE N° 7 : (12 pts)

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 10}$$

a) Les valeurs de x qui annulent le dénominateur rendent impossible le calcul de l'ordonnée :

$x_1 = -2$ est une racine évidente du trinôme du second degré ; puisque le produit des racines vaut $\frac{c}{a}$, ici $\frac{-10}{1} = -10$ alors $x_1 \times x_2 = -10 \Leftrightarrow -2x_2 = -10 \Leftrightarrow x_2 = 5$.

D'où : $D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 5\}$

b) On a, à droite de -2 : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x^2 + x - 6) = -4$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x^2 - 3x - 10) = 0^-$ d'où par quotient $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$;

À gauche de -2 : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x^2 + x - 6) = -4$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x^2 - 3x - 10) = 0^+$ d'où par quotient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty.$$

On a, à droite de 5 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} (x^2 + x - 6) = 24$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} (x^2 - 3x - 10) = 0^+$ d'où par quotient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x) = +\infty$$

De manière analogue, on obtient à gauche de 5 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x) = -\infty$

Au voisinage des infinis, la fonction rationnelle se comporte comme le quotient de ses

termes de plus grand exposant, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

Puisque $\lim_{|x| \rightarrow -2} f(x) = +\infty$ alors la courbe représentative (ξ) de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$;

Puisque $\lim_{|x| \rightarrow 5} f(x) = +\infty$ alors la courbe représentative (ζ) de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$;

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ alors la courbe (ζ) admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = 1$.

c) À l'intersection des deux courbes, les ordonnées des deux courbes sont égales, donc :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 10} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = x^2 - 3x - 10 \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1$$

Tous les points de la droite d'équation $y = 1$ ont pour ordonnée 1, donc le point d'intersection a pour coordonnées $(-1; 1)$.

d) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 5\}$.

f est du type $\frac{u}{v}$ dont la dérivée est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 + x - 6 \Rightarrow u'(x) = 2x + 1 \\ v(x) = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow v'(x) = 2x - 3 \end{cases} \quad \text{d'où :}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-3x-10) - (x^2+x-6)(2x-3)}{(x^2-3x-10)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 - 20x + x^2 - 3x - 10 - 2x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 3x + 12x - 18}{(x^2 - 3x - 10)^2} = \frac{-4x^2 - 8x - 28}{(x^2 - 3x - 10)^2}$$

e) Le signe de la dérivée livre les variations de la fonction.

Sur $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 5\}$, on a $(x^2 - 3x - 10)^2 > 0$ car c'est un carré donc f' est du signe du trinôme $-4x^2 - 8x - 28$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times (-4) \times (-28) = 64 - 448 < 0$$

Ce trinôme ne possède aucune racine donc la parabole qui « pleure » est située au-dessous de l'axe des abscisses et donc le trinôme est strictement négatif. Par conséquent,

$$-4x^2 - 8x - 28 < 0$$

Finalement, sur $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 5\}$, on a $f'(x) < 0$

On peut alors dresser le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$f'(x)$					
$f(x)$	$+\infty$ 	$-\infty$	$+\infty$ 	$-\infty$	$+\infty$ 

f) La tangente est une droite, donc son équation est du type $y = ax + b$ où a est le coefficient directeur de la droite : c'est le nombre dérivé au point d'abscisse -1 , d'où $y = f'(-1)x + b$.

$$\text{Or, } f'(-1) = \frac{-4 \times (-1)^2 - 8 \times (-1) - 28}{[(-1)^2 - 3 \times (-1) - 10]^2} = \frac{-4 + 8 - 28}{[1 + 3 - 10]^2} = \frac{-24}{(-6)^2} = -\frac{24}{36} = -\frac{2}{3}$$

D'où l'équation réduite de la tangente s'écrit $y = -\frac{2}{3}x + b$.

La tangente et la courbe sont sécantes au point d'abscisse -1 , donc l'ordonnée de ce point

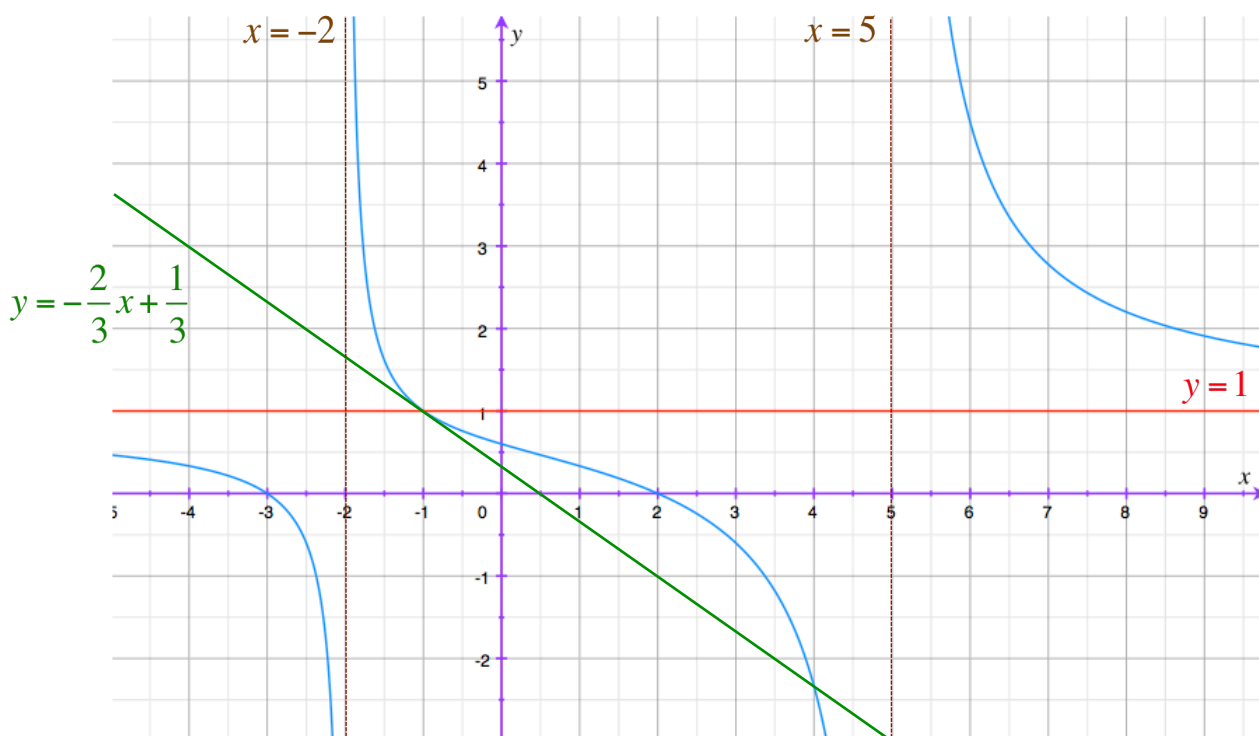
$$\text{commun vaut } f(-1) = \frac{(-1)^2 - 1 - 6}{(-1)^2 - 3 \times (-1) - 10} = \frac{-6}{-6} = 1$$

On injecte les coordonnées $(-1; 1)$ de ce point de contact dans l'équation de la tangente :

$$1 = -\frac{2}{3} \times (-1) + b \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3} + b \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{3} = b \Leftrightarrow \frac{1}{3} = b.$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 a pour équation réduite :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$



g) Le signe de la différence $[f(x) - (ax + b)]$ livre la position de la courbe représentative de f et la tangente d'équation $y = ax + b$.

$$[f(x) - (ax + b)] = \left[\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 10} - \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \right) \right] = \left[\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 10} + \frac{2x - 1}{3} \right]$$

$$= \frac{3x^2 + 3x - 18 + (2x - 1)(x^2 - 3x - 10)}{3(x^2 - 3x - 10)} = \frac{3x^2 + 3x - 18 + 2x^3 - 6x^2 - 20x - x^2 + 3x + 10}{3(x^2 - 3x - 10)}$$

$$[f(x) - (ax + b)] = \frac{2x^3 - 4x^2 - 14x - 8}{3(x^2 - 3x - 10)}$$

h) Puisque la courbe et la tangente sont sécantes au point de coordonnées $(-1; 1)$, alors la différence entre les ordonnées des deux courbes en ce point est nécessairement nulle, donc $x = -1$ est une racine du polynôme du 3^e degré du numérateur.

Par conséquent, on peut factoriser ce polynôme par $(x + 1)$. Grâce à la division polynomiale :

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 4x^2 - 14x - 8 \\
 \underline{-2x^3 - 2x^2} \\
 -6x^2 \\
 \underline{6x^2 + 6x} \\
 -8x \\
 \underline{8x + 8} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x+1 \\
 \hline
 2x^2 - 6x - 8
 \end{array}$$

On a alors : $\left[f(x) - (ax+b) \right] = \frac{(x+1)(2x^2 - 6x - 8)}{3(x^2 - 3x - 10)}$

On peut maintenant donner le signe de ce quotient car tous les facteurs en présence sont au maximum du 2^e degré. Cherchons les racines (*si elles existent*) des deux trinômes du second degré :

- *Au numérateur*

$x_1 = -1$ est une racine évidente ; grâce au produit des racines qui vaut $\frac{c}{a}$, ici $\frac{-8}{2} = -4$, on en déduit $x_1 \times x_2 = -4 \Leftrightarrow -1 \times x_2 = -4 \Leftrightarrow x_2 = 4$.

- *Au dénominateur*

$x_1 = -2$ est une racine évidente, donc $x_1 \times x_2 = -10 \Leftrightarrow -2 \times x_2 = -10 \Leftrightarrow x_2 = 5$

On peut alors dresser le tableau des signes correspondants :

x	$-\infty$	-2	-1	4	5	$+\infty$
$x+1$	—		—		+	+
$2x^2 - 6x - 8$	+		+		+	+
3	+		+		+	+
$x^2 - 3x - 10$	+		—		—	+
$f(x) - (ax+b)$	—		+		—	+

Le tableau confirme les constatations graphiques. En effet, on *voit* bien que la tangente est *strictement* au-dessus de la courbe sur les intervalles $]-2 ; -1[\cup]-1 ; 4[\cup]5 ; +\infty[$ et que les deux courbes sont sécantes aux points d'abscisses : $x \in \{-1 ; 4\}$

i) Égalisons les deux écritures de f :

$$\begin{aligned} \frac{1x^2 + 1x - 6}{(x+2)(x-5)} &= a + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-5} = \frac{a(x+2)(x-5) + b(x-5) + c(x+2)}{(x+2)(x-5)} \\ &= \frac{a(x^2 - 5x + 2x - 10) + bx - 5b + cx + 2c}{(x+2)(x-5)} = \frac{ax^2 - 3ax - 10a + bx - 5b + cx + 2c}{(x+2)(x-5)} \\ &= \frac{ax^2 + (-3a + b + c)x - 10a - 5b + 2c}{(x+2)(x-5)} \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -3a + b + c = 1 \Leftrightarrow -3 + b + c = 1 \Leftrightarrow b = 4 - c \\ -10a - 5b + 2c = -6 \Leftrightarrow -10 - 5(4 - c) + 2c = -6 \Leftrightarrow -10 - 20 + 5c + 2c = -6 \end{cases}$$

La dernière équation du système livre $7c = 24 \Leftrightarrow c = \frac{24}{7}$

En remplaçant dans la 2^e équation du système, on a $b = 4 - \frac{24}{7} = \frac{28 - 24}{7} = \frac{4}{7}$

D'où une autre écriture de f :

$$f(x) = 1 + \frac{4}{7(x+2)} + \frac{24}{7(x-5)}$$

j) Puisque la fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]5; +\infty[$ alors elle réalise une bijection de $]5; +\infty[$ sur $]1; +\infty[$. Or, $1,5 \in]1; +\infty[$ donc il existe un antécédent unique $\beta \in]5; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1,5$.

k) On lit sur la calculatrice $f(12,44) \approx 1,5004$ et $f(12,45) \approx 1,4998$ donc $f(12,44) > f(\beta) > f(12,45)$ et puisque f est décroissante sur cet intervalle, on a :

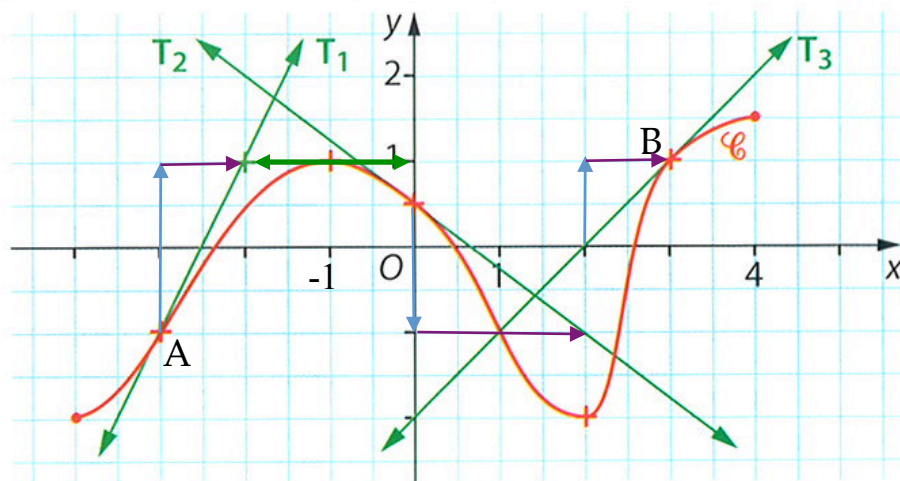
$$12,44 < \beta < 12,45$$

EXERCICE N° 6 : (6 pts)

Il faut bien différencier les deux écritures suivantes :

$f(a)$ signifie l'ordonnée du point de la courbe représentative de f ayant pour abscisse a ;

$f'(a)$ signifie le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .



a) $f'(-3) = \frac{4}{2} = 2$,

$f'(-1) = 0$ (la tangente est horizontale),

$f'(0) = \frac{-3}{4}$, $f'(3) = \frac{2}{2} = 1$

b) $f(-3) = -1$, $f(0) = \frac{1}{2}$.

c) La tangente (T_1) a pour coefficient directeur 2, donc son équation réduite s'écrit :
 $y = 2x + b$

Le point A de coordonnées $(-3 ; -1)$ appartient à cette tangente, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (T_1) :
 $-1 = 2 \times (-3) + b \Leftrightarrow -1 = -6 + b \Leftrightarrow 5 = b$

L'équation réduite de la tangente (T_1) est : $y = 2x + 5$

La tangente (T_3) a pour coefficient directeur 1 et le point B de coordonnées $(3 ; 1)$ est un point de cette droite, donc :
 $1 = 1 \times 3 + b \Leftrightarrow 1 = 3 + b \Leftrightarrow -2 = b$

L'équation réduite de la tangente (T_3) est : $y = x - 2$

d) On veut savoir sur quelles parties de la courbe l'inclinaison de la tangente sera positive :
 elle le sera sur $[-4 ; -1] \cup [2 ; 4]$