

Exercice 1 12 points

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 4xe^{-x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) En observant que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{4}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$$

Donc par inverse :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \text{ donc par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

- b) Interpréter graphiquement cette limite.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$

2. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = 4e^{-x^2}(1 - 2x^2)$.

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, comme composée et produit de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$

$$\text{On pose : } \begin{cases} u(x) = 4x \\ v(x) = e^{-x^2} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} u'(x) = 4 \\ v'(x) = -2xe^{-x^2} \end{cases}$$

Pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = 4e^{-x^2} - 8x^2e^{-x^2} = 4e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

3. a) Etudier le signe de $f'(x)$.

Pour tout réel $x \geq 0$,

$4e^{-x^2} > 0$, ainsi le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de $(1 - 2x^2)$

$$1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \text{ or } x \geq 0 \text{ donc } x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$(1 - 2x^2)$ est du signe de $a = -2$, donc négatif en dehors des deux racines donc $f'(x)$ est positif sur $\left[0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right]$

- b) En déduire le tableau de variation complet de f sur $[0 ; +\infty[$.

$$f(0) = 0e^{-0^2} = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$$

De plus d'après 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
variation de f	0	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$	0

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe (C) à l'origine du repère, notée (T).

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(0) = 4e^{-0^2}(1 - 0^2) = 4$$

$$f(0) = 0$$

$$\text{Donc (T): } y = 4x$$

5. On note F la fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ tel que $F(0) = 0$ et $(\mathcal{F})$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par vrai ou faux, en justifiant soigneusement vos réponses.

a) Pour tout réel $x \geq 0$, $F(x) = -2e^{-x^2} + 2$.

Pour tout réel $x \geq 0$, $F'(x) = -2 \times 2xe^{-x^2} = -4xe^{-x^2} = f(x)$

Donc F est bien une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$

De plus $F(0) = -2 + 2 = 0$

L'affirmation a) est donc vraie

b) La fonction F est convexe sur $[0 ; +\infty[$.

La dérivée seconde la fonction F est la fonction f' définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f'(x) = 4e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

D'après la question 3 a) F'' n'est pas positive sur $[0 ; +\infty[$ donc la fonction F n'est pas convexe sur $[0 ; +\infty[$ seulement sur $\left[0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

c) La courbe $(\mathcal{F})$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{2\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}}\right)$ sur $[0 ; +\infty[$.

F'' s'annule et change de signe en $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2e^{-x^2} + 2 = -2e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + 2 = -2e^{-\frac{1}{2}} + 2 = \frac{-2}{\sqrt{e}} + \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{e}} = \frac{2\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}}$$

L'affirmation est vraie

d) La fonction F est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

La fonction f dérivée de la fonction F sur $[0 ; +\infty[$ est positive d'après le tableau de variation de la question 3b) et ne s'annule qu'en 0 donc la fonction F est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

Exercice 2 12 points

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - e^{-x} - x$.

1. Démontrer que pour tout réel x , $g'(x) = e^{-x} - 1$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0 - (-1) \times e^{-x} - 1 = e^{-x} - 1$.

2. Justifier que le tableau de variations de la fonction g est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	1	$-\infty$

Calcul des limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - x = -\infty$ par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - e^{-x} - x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - x = +\infty$
ainsi par somme F.I

On factorise, pour tout réel $x > 0$, $2 - e^{-x} - x = x \left(\frac{2}{x} + \frac{e^{-x}}{-x} - 1 \right)$.

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty \end{cases}$ par croissance comparée, d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ par composition

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} - 1 = -1$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{e^{-x}}{-x} - 1 \right) = +\infty$

Et enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

Signe de $g'(x)$ et variations de g :

$e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Et si $x > 0$ alors $-x < 0$ donc $e^{-x} < e^0$, car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, soit $e^{-x} < 1$, d'où $e^{-x} - 1 < 0$. On déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$.

Enfin, $g(0) = 2 - e^{-0} - 0 = 2 - 1 = 1$.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[0 ; 2]$ et en donner une valeur approchée au millièmes près.

D'une part g est dérivable sur $[0 ; 2]$, donc continue sur $[0 ; 2]$.

D'autre part $g(0) = 1 > 0$; $g(2) = 2 - e^{-2} - 2 = -\frac{1}{e^2} < 0$ et g est strictement croissante sur $[0 ; 2]$.

Par le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0 ; 2]$. Avec la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 1,841$.

4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0 ; 2]$. Justifier la réponse.

x	0	α	2
Signe de $g(x)$	+	0	-

En effet, si $0 < x < \alpha$ alors $g(0) > g(x) > g(\alpha)$, car g est décroissante sur $[0 ; 2]$, or $g(\alpha) = 0$ et $g(0) = 1$, donc $g(x) > 0$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 2 - e^{-u_n}.$$

5. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) en donnant quatre valeurs numériques.

Par la calculatrice, on obtient : $u_0 = 1$; $u_1 \approx 1,632$; $u_2 \approx 1,804$; $u_3 \approx 1,835$
ainsi $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$. La suite (u_n) semble croître.

6. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq \alpha$.

Énoncé : Pour tout entier naturel n , $P(n)$ désigne la propriété : " $1 \leq u_n \leq \alpha$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $1 < \alpha$ par la question (3), donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Pour un certain n entier naturel quelconque et fixé, supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire $1 \leq u_n \leq \alpha$ et démontrons $P(n+1)$.

Alors, $1 \leq u_n \leq \alpha$, par hypothèse de récurrence ;

$$-1 \geq -u_n \geq -\alpha, \text{ car on multiplie par } -1 < 0 ;$$

$$e^{-1} \geq e^{-u_n} \geq e^{-\alpha}, \text{ car la fonction } x \rightarrow e^x \text{ est croissante sur l'ensemble des réels ;}$$

$$-e^{-1} \leq -e^{-u_n} \leq -e^{-\alpha}, \text{ car on multiplie par } -1 < 0 ;$$

$$2 - e^{-1} \leq 2 - e^{-u_n} \leq 2 - e^{-\alpha}.$$

Or on sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{-\alpha} - \alpha = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{-\alpha} = \alpha$ et $1 < 2 - e^{-1}$, on en déduit $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$. D'où le résultat

Conclusion : La propriété $P(n)$ est initialisée et est héréditaire, par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq \alpha$.

- b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 2 - e^{-u_n} - u_n = g(u_n)$.

- c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

On sait que $\forall x \in [0 ; \alpha]$, $g(x) \geq 0$ d'après la question 4 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq \alpha$ d'après la question 6a), donc $g(u_n) \geq 0$ et par conséquent $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

7. Montrer que la suite (u_n) est convergente et sa limite ℓ vérifie l'égalité $\ell = 2 - e^{-\ell}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par α , par le théorème de la convergence monotone, elle converge alors vers un réel $\ell \in [0 ; \alpha]$.

D'une part, g est continue en ℓ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell, \quad \text{par composition} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell)$$

Et d'autre part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$$

ainsi, par unicité de la limite, $g(\ell) = 0$. Or, l'équation $\ell = 2 - e^{-\ell}$ équivaut à $g(\ell) = 0$, d'où le résultat.

8. On considère le script Python ci-dessous.

```
def g(x):  
    y=2-exp(-x)-x  
    return y  
  
def balayage(a,h):  
    x=a  
    while g(a)*g(x)>0:  
        x=x+h  
    return (x-h,x)
```

L'appel de la commande `balayage(1,0.001)` affiche `(1.841, 1.842)`.

Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

Il s'agit d'un encadrement de α , d'amplitude un millièm, solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $[0; 2]$, autrement-dit, la limite de la suite (u_n) , soit $1.841 < \ell < 1.842$.

Exercice 3 12 points

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n°1
- 20% des composants sont conçus sur la chaîne n°2
- Les composants restant sont conçus sur la chaîne n°3

A l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 4% des pièces issues de la chaîne n°1 présentent un défaut, de même que 0,5% des pièces issues de la chaîne n°2 et 1% des pièces issues de la chaîne n°3

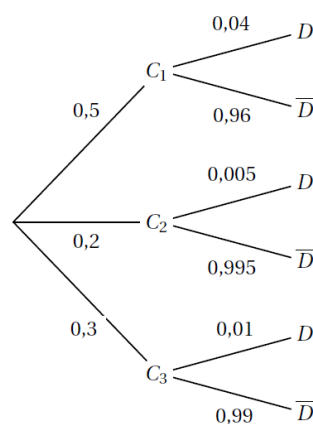
On prélève au hasard un de ces composants et on note :

- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°1
- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°2
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°3
- D l'évènement « le composant est défectueux » et $\bar{D}$ son évènement contraire

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} si nécessaire.

Partie A

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré



2. Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n°1 et soit défectueux.

$$P(C_1 \cap D) = P(C_1) \times P_{C_1}(D) = 0,5 \times 0,04 = 0,02$$

La probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n°1 et soit défectueux est 0,02

3. Montrer que la probabilité de l'évènement D est $P(D) = 0,024$

C_1, C_2 et C_3 forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales

$$P(D) = P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D) + P(C_3 \cap D)$$

$$= 0,02 + 0,2 \times 0,005 + 0,3 \times 0,01$$

$$= 0,02 + 0,001 + 0,003$$

$$P(D) = 0,024$$

4. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n°1

$$P_D(C_1) = \frac{P(D \cap C_1)}{P(D)} = \frac{0,02}{0,024} = \frac{5}{6} \approx 0,8333 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

Partie B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituants des lots de n unités. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot.

Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,024$

1. Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$

a) Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.

$X \sim B(20; 0,024)$ alors

$$P(X = 3) = \binom{20}{3} 0,024^3 (1 - 0,024)^{20-3} = 1140 \times 0,024^3 \times 0,976^{17}$$

$$P(X = 3) \approx 0,0104 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

b) Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.

En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux

$$P(X = 0) = (1 - 0,024)^{20} = 0,976^{20} \approx 0,6152$$

La probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de 20 unités est d'environ 61,52%

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,3848$$

La probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux est d'environ 38,48%

2. Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à 0,8.

Il propose de former des lots de 15 composants au maximum. A-t-il raison ? Justifier la réponse

On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètre n et $p = 0,024$

La probabilité de n'avoir aucun composant défectueux est

$$P(Y = 0) = 0,976^n$$

On cherche dans la table de la calculatrice le plus petit entier n tel que $0,976^n \leq 0,8$

$$0,976^9 \approx 0,8036 \geq 0,8 \text{ et } 0,976^{10} \approx 0,7843 \leq 0,8$$

Le directeur a tort au maximum les lots doivent contenir 9 composants.

Partie C

Les coûts de fabrications des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne n°1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne n°2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne n°3

Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

$$0,5 \times 15 + 0,2 \times 12 + 0,3 \times 9 = 12,6$$

Le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise est égal à 12,60 € par composant

Exercice 4 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule réponse des quatre réponses est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ç une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 2]$.

Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ est donné par :

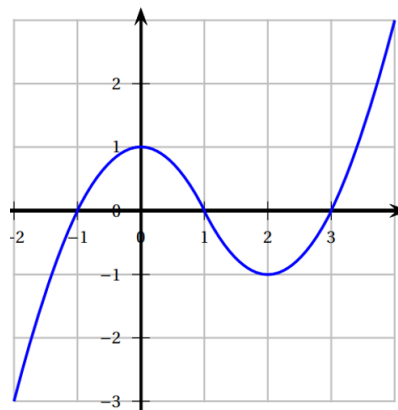
x	-2	-1	0	2
Variations de f'	1		1	-1
		0	-2	

La fonction f est :

a) convexe sur $[-2 ; -1]$	b) concave sur $[0 ; 1]$	c) convexe sur $[-1 ; 2]$	d) concave sur $[-2 ; 0]$
-----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

La bonne réponse est **d)**. En effet, sur $[-2 ; 0]$, la fonction dérivée f' est décroissante.

2. On donne ci-contre la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-2 ; 4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f' , déterminer l'affirmation correcte pour f :

a) f est décroissante sur $[0 ; 2]$	b) f est croissante sur $[-1 ; 0]$
c) f admet un maximum en 1 sur $[0 ; 2]$	d) f admet un maximum en 3 sur $[2 ; 4]$

La bonne réponse est **b)**. En effet, sur $[-1 ; 0]$, la fonction dérivée f' est positive.

La réponse c) est aussi correct la dérivée s'annule et change de signe

3. On considère la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n par : $b_n = \frac{1-3^n}{2+2^n}$

La limite de la suite (b_n) est égale à :

a) $-\infty$	b) -1	c) 1	d) $+\infty$
---------------------	----------------	---------------	---------------------

La bonne réponse est a). En effet, pour n entier naturel, $\frac{2^n(\frac{1}{2^n} - (\frac{3}{2})^n)}{2^n(\frac{2}{2^n} + 1)} = \frac{(\frac{1}{2^n} - (\frac{3}{2})^n)}{(\frac{1}{2^{n-1}} + 1)}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ et } \lim_n \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty \text{ car } \frac{3}{2} > 1$$

$$\text{par somme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} - \left(\frac{3}{2}\right)^n = -\infty$$

$$\text{De plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + 1 = 1$$

$$\text{et par quotient, } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$$

4. Une entreprise fabrique en grande série des rondelles. Le contrôleur de qualité a observé que dans la production, 3 % des rondelles présentent des défauts de surface qui les rendent inutilisables. Ces rondelles sont livrées en boîte de trente. On tire au hasard une de ces boîtes (on assimilera cette épreuve à un tirage successif avec remise de 30 pièces dans la production).
La probabilité que la boîte contienne au moins vingt-huit rondelles sans défaut (à 10^{-4} près) est égale à

a) 0,9399	b) 0,1664	c) 0,4	d) 0,8886
------------------	------------------	---------------	------------------

La bonne réponse est a). En effet, si on appelle X le nombre de rondelles avec défaut, alors X suit la loi binomiale de paramètres 30 et 0,03. On cherche $P(30 - X \geq 28) = P(X \leq 2) \approx 0,9399$.

5. Pour tous réels a et b , l'expression $(e^{a+b})^2$ peut s'écrire sous la forme :

a) $e^{2a} + e^{2b}$	b) $e^{a^2} + e^{b^2}$	c) $e^{a^2+b^2}$	d) $e^{a^2+b^2+2ab}$
-----------------------------	-------------------------------	-------------------------	-----------------------------

Aucune réponse $(e^{a+b})^2 = e^{2(a+b)} = e^{2a} \times e^{2b}$

Cette question n'est pas comptabilisée