Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 **11 points**

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 4xe^{-x^2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) En observant que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{4}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   b) Interpréter graphiquement cette limite.

2. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = 4e^{-x^2}(1 - 2x^2)$.

3. a) Etudier le signe de $f'(x)$.
   b) En déduire le tableau de variation complet de f sur $[0\,;+\infty[$.

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe (C) à l'origine du repère, notée (T).

5. On note F la fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ tel que $F(0) = 0$ et $(\mathcal{F})$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
   Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par vrai ou faux, en justifiant soigneusement vos réponses.

   a) Pour tout réel $x \geq 0$, $F(x) = -2e^{-x^2} + 2$.

   b) La fonction F est convexe sur $[0\,;+\infty[$.

   c) La courbe $(\mathcal{F})$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\,\frac{2\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}}\right)$ sur $[0\,;+\infty[$.

   d) La fonction F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 2 **12 points**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - e^{-x} - x$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $g'(x) = e^{-x} - 1$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations de la fonction g ci-dessous :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
Variations de g	$-\infty$ ↗ 1 ↘ $-\infty$

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[0\,;2]$ et en donner une valeur approchée au millième près.

4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;2]$. Justifier la réponse.

Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, \; u_{n+1} = 2 - e^{-u_n}.$$

5. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) en donnant quatre valeurs numériques.

6. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq \alpha$.

   b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

   c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

7. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite ℓ vérifie l'égalité $\ell = 2 - e^{-\ell}$.

8. On considère le script Python ci-dessous.

```
def g(x):
    y=2-exp(-x)-x
    return y

def balayage(a,h):
    x=a
    while g(a)*g(x)>0:
        x=x+h
    return(x-h,x)
```

L'appel de la commande balayage(1,0.001) affiche (1.841, 1.842).

Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 **12 points**

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaines de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n°1
- 20% des composants sont conçus sur la chaîne n°2
- Les composants restant sont conçus sur la chaîne n°3

A l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 4% des pièces issues de la chaîne n°1 présentent un défaut, de même que 0,5% des pièces issues de la chaîne n°2 et 1% des pièces issues de la chaîne n°3

On prélève au hasard un de ces composants et on note :

- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaine n°1
- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°2
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°3
- D l'évènement « le composant est défectueux » et $\overline{D}$ son évènement contraire

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} si nécessaire.

Partie A

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré
2. Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n°1 et soit défectueux.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement D est $P(D) = 0{,}024$
4. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaine n°1

Partie B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituants des lots de n unités.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot.
Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}024$

1. Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$
   a) Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.
   b) Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.
   En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux

2. Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à 0,8.
   Il propose de former des lots de 15 composants au maximum. A-t-il raison ? Justifier la réponse

Partie C

Les coûts de fabrications des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne n°1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne n°2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne n°3
Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

Exercice 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule réponse des quatre réponses est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

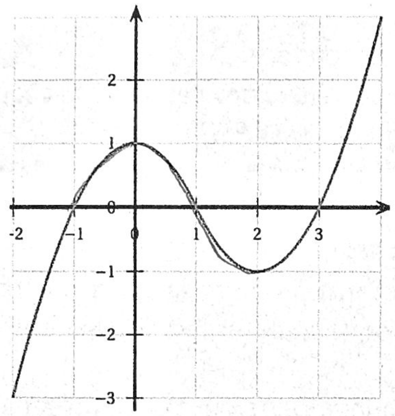
1. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2\ ;\ 2]$.
Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ est donné par :

x	-2	-1	0	2
Variations de f'	1		1	-1
		0	-2	

La fonction f est :

a) convexe sur $[-2; -1]$	**b)** concave sur $[0\ ;1]$	**c)** convexe sur $[-1; 2]$	**d)** concave sur $[-2\ ;0]$

2. On donne ci-contre la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-2\ ;\ 4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a) f est décroissante sur $[0; 2]$	**b)** f est croissante sur $[-1; 0]$
c) f admet un maximum en 1 sur $[0; 2]$	**d)** f admet un maximum en 3 sur $[2; 4]$

3. On considère la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n par : $b_n = \frac{1-3^n}{2+2^n}$
La limite de la suite (b_n) est égale à :

a) $-\infty$	**b)** -1	**c)** 1	**d)** $+\infty$

4. Une entreprise fabrique en grande série des rondelles. Le contrôleur de qualité a observé que dans la production, 3 % des rondelles présentent des défauts de surface qui les rendent inutilisables. Ces rondelles sont livrées en boîte de trente. On tire au hasard une de ces boîtes (on assimilera cette épreuve à un tirage successif avec remise de 30 pièces dans la production).
La probabilité que la boîte contienne au moins vingt-huit rondelles sans défaut (à 10^{-4} près) est égale à

a) 0,9399	**b)** 0,1664	**c)** 0,4	**d)** 0,8886

5. Pour tous réels a et b, l'expression $(e^{a+b})^2$ peut s'écrire sous la forme :

a) $e^{2a} + e^{2b}$	**b)** $e^{a^2} + e^{b^2}$	**c)** $e^{a^2+b^2}$	**d)** $e^{a^2+b^2+2ab}$