

Complexes N°3

⌚ 1h30 📖 autorisée

I Exercice

- 1) Exprimer $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
- 2) On admet que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$. En utilisant les formules de duplication, déterminer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

II Exercice

Q) On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

$$z^3 + (-2\sqrt{3} + 2i)z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = 0 \quad (E)$$

- a) Montrer que le nombre $-2i$ est une solution de l'équation (E).
- b) Vérifier que, pour tout nombre complexe z , on a :

$$z^3 + (-2\sqrt{3} + 2i)z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = (z + 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$$

- c) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
- d) Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.



Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O

- 1) On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} - i$.
 - a) Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
 - b) Placer ces points sur une figure que l'on complètera par la suite.
 - c) On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_L du point L tel que AODL soit un parallélogramme.
- 2) On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.
 - a) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z' .
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\bar{z}'$ est un imaginaire pur.
 - b) À l'aide de la question a, démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

III Exercice

On considère le nombre complexe $z_1 = -8 - 8i$

- 1) Déterminer la forme algébrique de z_1^6
- 2) z_1^{1500} est-il un nombre réel, imaginaire pur ou un nombre complexe quelconque?

