

Convexité

1h autorisée

I Exercice

5 points

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

- 1) Étudier les variations de p sur $\mathbb{R}$.
- 2) Étudier la convexité de p sur $\mathbb{R}$.
- 3) Quelles sont les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de p ? Justifier.

II Exercice

5 points

Soit f une fonction définie sur un intervalle I par l'expression donnée.
Déterminer sa fonction dérivée f' .

1) $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)^2$ avec $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \frac{1}{x^3 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}}$ avec $I =]0; +\infty[$.

III Exercice

4 points

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^3 - x + 6}$

- 1) Déterminer $g'(x)$ pour tout réel $x \in]-2; +\infty[$
- 2) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

IV Exercice

5 points

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty]$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- 1) Étudier la convexité de f .
- 2) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- 3) En déduire que pour tout réel $x \in [0; +\infty]$: $\sqrt{1+x} \leq 1 + 0,5x$

V Exercice

1 point

En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, démontrer que pour tous réels a et b :

$$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$$

