

Devoir maison n°1

À rendre le lundi 7 novembre 2022

Exercice 94 p60

94 ... en économie Amortissement d'une dette

Pour financer l'achat d'une voiture, un couple emprunte un capital de 20 000 €, avec des mensualités de remboursement constantes égales à 500 €.



Sa banque lui propose un taux annuel d'emprunt de 3,84 %, soit un taux mensuel de 0,32 %.

Chaque mois, la mensualité de 500 € se répartit entre des intérêts (0,32 % du capital restant dû en début de mois) et un remboursement du capital.

Partie A Étude à l'aide d'un tableau

On souhaite mettre en place la feuille de calcul suivante pour construire le tableau d'amortissement de la dette, qui donne chaque mois le capital restant dû.

	A	B	C	D	E
	Nombre de mois depuis le début de l'emprunt	Capital restant dû en début de période	Intérêts	Mensualité	Capital restant dû en fin de période
1	1	20 000,00 €		500,00 €	
2	2			500,00 €	
4	3			500,00 €	

1. Justifier que les intérêts du premier mois s'élèvent à 64 € et que le capital restant dû à l'issue du premier mois est égal à 19 564 €.

2. Calculer les intérêts du 2^e mois et le capital restant dû à l'issue de deux mois de remboursement.

3. Proposer des formules à entrer dans les cellules C2, E2 et B3, à recopier vers le bas, de façon à construire le tableau d'amortissement.

4. a. Après combien de mois sera remboursé le prêt ? Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

b. À l'aide du tableur, calculer le coût du prêt, c'est-à-dire le montant que le couple verse à sa banque en plus du montant emprunté. Quelle proportion du montant emprunté celui-ci représente-t-il ?

Partie B Étude à l'aide d'une suite

Pour tout entier $n \geq 0$, on note C_n le capital restant dû à la fin du n -ième mois de remboursement du prêt et I_n les intérêts du n -ième mois de remboursement. Ainsi $C_0 = 20\,000$; $C_1 = 19\,564$; $I_0 = 0$ et $I_1 = 64$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a :

$$C_{n+1} = 1,0032 \times C_n - 500$$

2. a. Montrer que la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = C_n - 156\,250$ est géométrique. Préciser sa raison.

b. En déduire l'expression de C_n en fonction de n .

c. À l'aide de la calculatrice, résoudre dans \mathbb{N} l'inéquation $C_n \leq 0$. Interpréter le résultat obtenu.

3. a. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$I_n = 0,0032 \times C_{n-1}$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n = 500 - 436 \times 1,0032^{n-1}$$

4. Calculer la somme $I_1 + I_2 + \dots + I_{43}$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 48 p192

48 ... en épidémiologie Le modèle « SIR »

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être dans l'un des trois états suivants : **état S** susceptible d'être atteint par le virus ; **état I** infecté par le virus ; **état R** rétabli et ne pouvant plus être infecté par le virus.

Un individu est dans l'état R lorsqu'il a été vacciné ou lorsqu'il a guéri après avoir été infecté par le virus.

Pour tout entier naturel n , le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

① Parmi les individus à l'état S une semaine donnée, 85 % restent à cet état la semaine suivante, 5 % deviennent malades et 10 % sont rétablis.

② Parmi les individus infectés (à l'état I) une semaine donnée, 65 % restent malades et 35 % sont rétablis.

③ Tout individu rétabli une semaine donnée l'est également la semaine suivante.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

S_n : « l'individu est à l'état S en semaine n », I_n : « l'individu est à l'état I en semaine n » et R_n : « l'individu est à l'état R en semaine n ». En semaine 0, tous les individus sont à l'état S, ainsi $P(S_0) = 1$, $P(I_0) = P(R_0) = 0$. On note, pour tout entier naturel n , $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(I_n)$ et $w_n = P(R_n)$.

Partie A Évolution au cours des deux premières semaines

1. Construire un arbre de probabilité modélisant la situation pour les deux premières semaines.

2. Montrer que $P(R_2) = 0,2025$.

3. Calculer et interpréter $P_{R_2}(I_1)$. Arrondir au millièmes.

Partie B Évolution sur le long terme

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a :

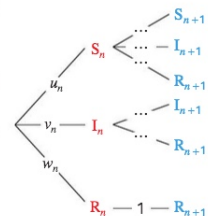
$$u_n + v_n + w_n = 1$$

2. a. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = 0,85u_n$$

$$\text{et } v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$$



Info

Le pic épidémique est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

4. a. Quelle est la nature de la suite u ? En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

On admettra dans la suite que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n = 0,25(0,85^n - 0,65^n)$.

b. Calculer les limites des suites u , v et w .

Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?