

Exercice 1

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

On considère un vélo de la société pris au hasard.

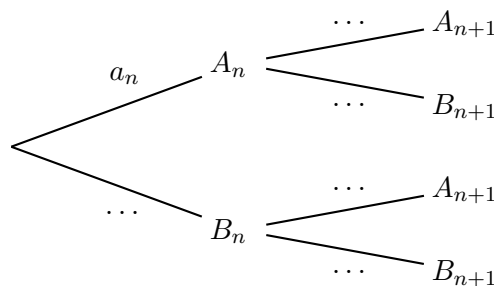
Pour tout entier naturel non nul n , on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n -ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n -ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n , on note a_n la probabilité de l'évènement A_n .

Ainsi $a_1 = 0,5$.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $n + 1$ -ième matins.



- b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

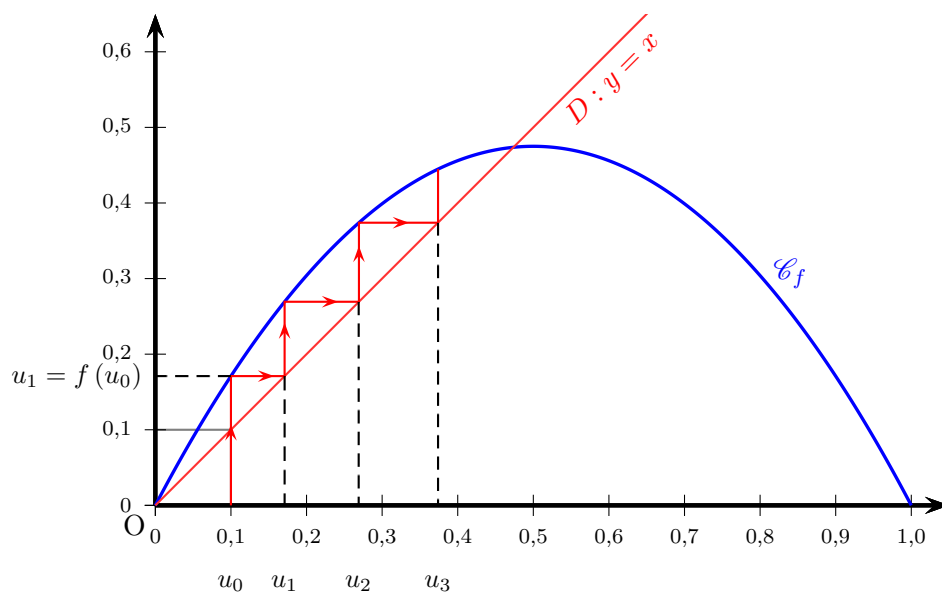
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

1. Calculer u_1 .
2. On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
 - a. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
 - b. En déduire que si $x \in [0 ; 1]$ alors $f(x) \in [0 ; 1]$.
3. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



4. a. En utilisant les résultats de la question 2, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python `algo(p)` où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p):  
    u=1/4  
    n=0  
    while u>10**(-p):  
        u=1/2*u*(1-u)  
        n=n+1  
    return n
```

- a. Que renvoie `algo(4)` ?
- b. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p , la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

Exercice 3

On considère la fonction f , définie sur $[0 ; 100]$, par $f(x) = \frac{x+10}{3x+2}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans une repère orthonormé.

1. Montrer que pour tout $x \in [0 ; 100]$, $f'(x) = \frac{-28}{(3x+2)^2}$.
2. En déduire le tableau de variation complet de la fonction f .
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.
4. Étudier la convexité de la fonction f .
5. On considère la fonction suivante en python :

```
def f(x):  
    return (x+10)/(3*x+2)
```

Que renvoie la commande `f(f(4))` ?

Exercice 4

Partie 1 Restitution organisée de connaissances

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Partie 2

Pour chacune des six affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Une justification est attendue.

Une mauvaise réponse n'enlève pas de point.

Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

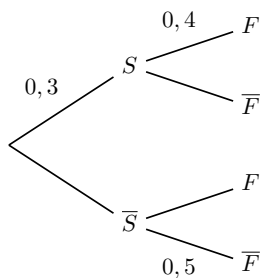
Dans un établissement scolaire, 30 % des élèves sont inscrits dans un club de sport, et parmi eux, 40 % sont des filles. Parmi ceux n'étant pas inscrits dans un club de sport, 50 % sont des garçons.

Pour tout évènement E , on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $P(E)$ sa probabilité. Pour tout évènement F de probabilité non nulle, on note $P_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On interroge un élève au hasard et on considère les évènements suivants :

- S : « l'élève est inscrit dans un club de sport »
- F : « l'élève est une fille »

La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-dessous.



Affirmation A.

La probabilité que l'élève soit une fille est égale à 0,47.

Affirmation B.

Une CPE se rend dans une classe sans garçon. La probabilité que l'élève qu'elle interroge soit inscrit dans une salle de sport est 0,3.

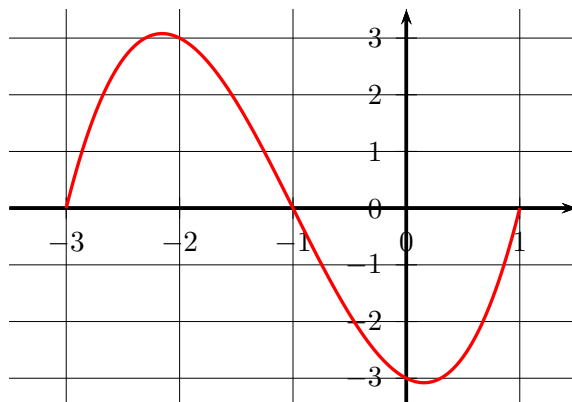
Affirmation C.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{7n^2 - 3n + 12} = 0$$

Affirmation D.

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ n'a pas de limite.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 1]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde f'' .



Affirmation E.

La fonction f est concave sur $[-2; -1]$.

Affirmation F.

La fonction f' est décroissante sur $[-1; 0]$.