

Exercice 1

(1+2)+2+1+1 : 7 points

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

On considère un vélo de la société pris au hasard.

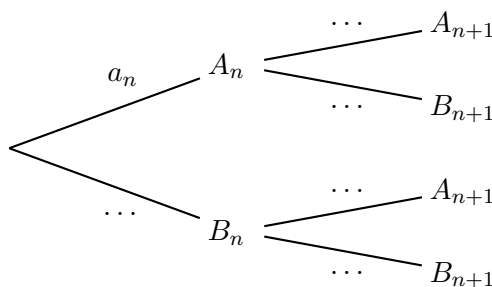
Pour tout entier naturel non nul n , on définit les événements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n -ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n -ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n , on note a_n la probabilité de l'évènement A_n .

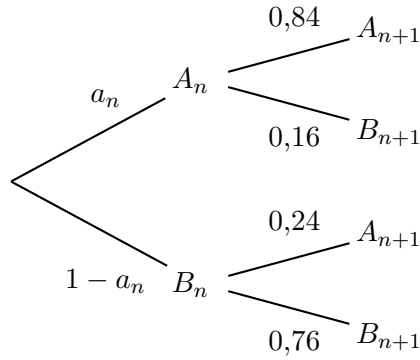
Ainsi $a_1 = 0,5$.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $n + 1$ -ième matins.



$$P(B_n) = 1 - P(A_n) = 1 - a_n.$$

L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Les événements A_n et B_n forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
 &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\
 &= p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n) \\
 &= a_n \times 0,84 + (1 - a_n) \times 0,24 \\
 &= 0,84a_n + 0,24 - 0,24a_n \\
 &= 0,6a_n + 0,24
 \end{aligned}$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Soit P_n la propriété : « $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$ », pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation.

D'une part, $0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1} = 0,6 - 0,1 = 0,5$.

D'autre part, $a_1 = 0,5$ d'après l'énoncé.

Donc P_1 est vraie.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé.

Supposons que P_n est vraie, c'est à dire $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que, sous cette hypothèse, $a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$.

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= 0,6a_n + 0,24, \text{ d'après la question précédente} \\
 &= 0,6(0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}) + 0,24, \text{ par hypothèse de récurrence} \\
 &= 0,36 - 0,1 \times 0,6 \times 0,6^{n-1} + 0,24 \\
 &= 0,6 - 0,1 \times 0,6^n
 \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion.

La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^{n-1} = 0 \text{ car } -1 < 0,6 < 1.$$

$$\text{Par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} -0,1 \times 0,6^{n-1} = 0.$$

$$\text{Par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} = 0,6.$$

Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

A l'aide de la calculatrice, on obtient $u_{10} \simeq 0,59899$ et $u_{11} \simeq 0,5994$.

Donc $n = 11$ convient.

La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à 0,599 à partir du 11-ième jour.

Exercice 2

1+(2+1)+1+(2+1) et 1+(1+1) : 11 points

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = k u_n (1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9 u_n (1 - u_n)$.

1. Calculer u_1 .

$$u_1 = 1,9 u_0 (1 - u_0) = 1,9 \times 0,1 \times (1 - 0,1) = 0,171$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.

- a. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = 1,9x(1 - x) = 1,9x - 1,9x^2$.

La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ comme fonction polynôme.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = 1,9 - 1,9 \times 2x = 1,9 - 3,8x$.

Étudions les signes de $f'(x)$. La fonction f' est une fonction affine.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,9 - 3,8x = 0 \Leftrightarrow -3,8x = -1,9 \Leftrightarrow x = \frac{-1,9}{-3,8} = \frac{1}{2}$$

Le coefficient directeur de f' est $-3,8 < 0$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $f'(x) < 0$ sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

On obtient le tableau des signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations de f :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
Signes de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	0	0.475	0

$$f(0) = 1,9 \times 0 - 1,9 \times 0^2 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,9 \times 0,5 - 1,9 \times 0,5^2 = 0,475$$

$$f(1) = 1,9 \times 1 - 1,9 \times 1^2 = 0$$

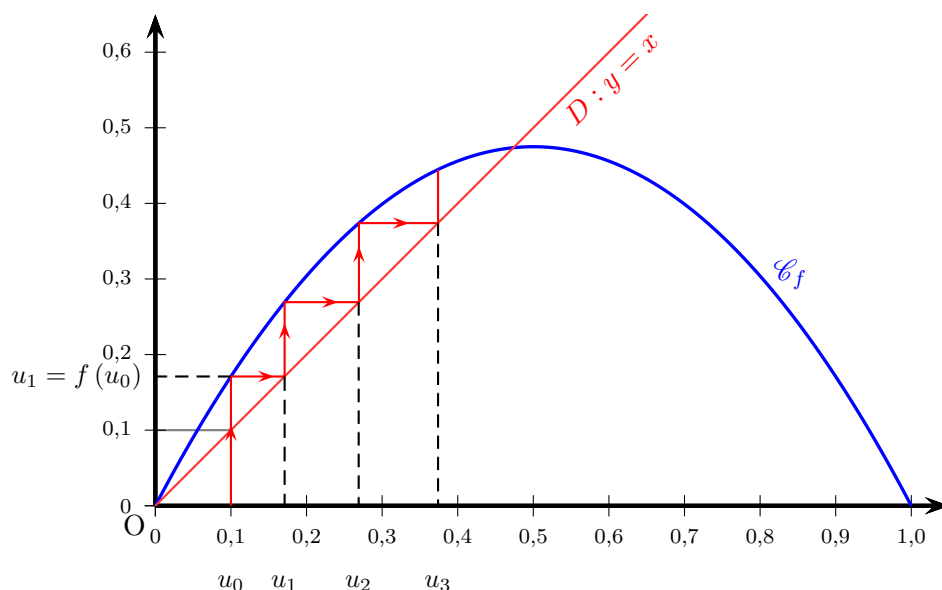
b. En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.

D'après la question précédente, le minimum de la fonction f sur $[0; 1]$ est 0 et son maximum est 0,475.

On a donc, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 0,475]$, et donc $f(x) \in [0; 1]$.

3. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.

La suite (u_n) semble croissante et semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et D .



4. a. En utilisant les résultats de la question 2, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Soit P_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$

$u_0 = 0,1$ et $u_1 = 0,171$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier quelconque fixé.

On suppose la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que, sous cette hypothèse, la propriété vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$.

Par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

La fonction f est croissante sur $[0; 1]$ donc sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

On obtient, en appliquant la fonction f :

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,475 \leq \frac{1}{2}$

On en déduit que : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$.

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion.

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire. Donc elle est vraie pour tout entier naturel n , c'est à dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$, pour tout entier naturel n .

- b. En déduire que la suite (u_n) converge.

De la propriété précédente, on tire :

- pour tout n , $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante ;
- pour tout n , $u_n \leq \frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

$$-1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

$$\text{Pour tout } n, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

2. On considère la fonction Python `algo(p)` où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p):
    u=1/4
    n=0
    while u>10**(-p):
        u=1/2*u*(1-u)
        n=n+1
    return n
```

a. Que renvoie `algo(4)` ?

`algo(4)` renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 10^{-4}$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient $u_{10} \simeq 0,0002 > 10^{-4}$ et $u_{11} \simeq 0,00008 < 10^{-4}$.

Donc `algo(4)` renvoie 11.

b. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p , la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

La boucle s'arrête quand u est inférieur ou égal à $10^{-(p)}$, c'est-à-dire pour la première valeur de n vérifiant $u_n \leq 10^{-p}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, il y a une première valeur n_0 à partir de laquelle $u_n \leq 10^{-p}$ pour tout $n \geq n_0$.

La boucle `while` ne tourne donc pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

Exercice 3

1+1+0.5+1+0.5 : 4 points

1. Montrer que pour tout $x \in [0 ; 100]$, $f'(x) = \frac{-28}{(3x+2)^2}$

La fonction f est dérivable sur $[0 ; 100]$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $[0 ; 100]$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall x \in [0 ; 100]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (3x+2) - (x+10) \times 3}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{-28}{(3x+2)^2} \end{aligned}$$

2. En déduire le tableau de variation complet de la fonction f .

x	0	100
signe de $f'(x)$	—	
variation de f	5	$\frac{55}{151}$

3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

Équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Ici $a = 4$ donc :

$$y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

$$y = -\frac{1}{7}(x - 4) + 1$$

On développe pour obtenir la forme réduite : $y = -\frac{1}{7}x + \frac{11}{7}$

4. Étudier la convexité de la fonction f .

On va étudier le signe de f'' :

Pour $x \in [0 ; 100]$,

$$f''(x) = -28 \times \frac{-2 \times 3}{(3x + 2)^3} = \frac{168}{(3x + 2)^3}$$

f'' est strictement positive sur $[0 ; 100]$, ainsi f est convexe sur cet intervalle.

5. On considère la fonction suivante en python :

```
def f(x):
    return (x+10)/(3*x+2)
```

Que renvoie la commande $f(f(4))$?

$f(4)$ renvoie 1.0 et $f(f(4))$ renvoie 2.2

Exercice 4

2 et 1pt par affirmation : 8 points

Partie 1 Restitution organisée de connaissances

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Partie 2

Pour chacune des six affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Une justification est attendue.

Une mauvaise réponse n'enlève pas de point.

Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

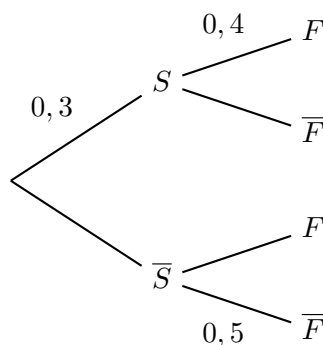
Dans un établissement scolaire, 30 % des élèves sont inscrits dans un club de sport, et parmi eux, 40 % sont des filles. Parmi ceux n'étant pas inscrits dans un club de sport, 50 % sont des garçons.

Pour tout évènement E , on note $\bar{E}$ l'évènement contraire de E et $P(E)$ sa probabilité. Pour tout évènement F de probabilité non nulle, on note $P_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On interroge un élève au hasard et on considère les évènements suivants :

- S : « l'élève est inscrit dans un club de sport »
- F : « l'élève est une fille »

La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-dessous.



Affirmation A.

La probabilité que l'élève soit une fille est égale à 0,47.

On cherche $P(F)$.

Les évènements S et $\bar{S}$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(F) &= P(S \cap F) + P(\bar{S} \cap F) \\
 &= P(S) \times P_S(F) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(F) \\
 &= 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,5 \\
 &= 0,47
 \end{aligned}$$

L'affirmation A est vraie.

Affirmation B.

Une CPE se rend dans une classe sans garçon. La probabilité que l'élève qu'elle interroge soit inscrit dans une salle de sport est 0,3.

On cherche $P_F(S)$.

$$P_F(S) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(S) \times P_S(F) + P(\bar{S})}{P(F)} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,47} \simeq 0,26.$$

L'affirmation B est fausse.

Affirmation C.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{7n^2 - 3n + 12} = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{3n^2 + n}{7n^2 - 3n + 12} = \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(7 - \frac{3}{n} + \frac{12}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{7 - \frac{3}{n} + \frac{12}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 = 7, \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12}{n^2} = 0 \text{ donc par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(7 - \frac{3}{n} + \frac{12}{n^2}\right) = 7.$$

$$\text{Par quotient, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{7n^2 - 3n + 12} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{7 - \frac{3}{n} + \frac{12}{n^2}} = \frac{3}{7}.$$

L'affirmation C est fausse.

Affirmation D.

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ n'a pas de limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

D'où, en divisant par $(n^2 + 1) > 0$,

$$\frac{-1}{n^2 + 1} \leq \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ donc par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 1 = +\infty.$$

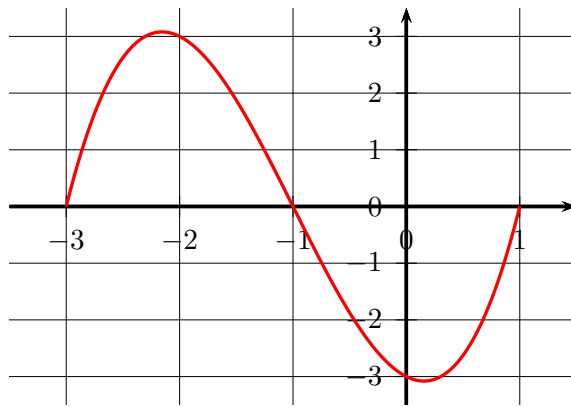
$$\text{Par quotient, on obtient, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2 + 1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0.$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{-1}{n^2 + 1} \leq \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1}. \text{ De plus, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge et sa limite est 0.

L'affirmation D est fausse.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3; 1]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde f'' .



Affirmation E.

La fonction f est concave sur $[-2; -1]$.

Sur $[-2; -1]$, la fonction f'' est positive. Donc la fonction f est convexe sur $[-2; -1]$.
L'affirmation E est fausse.

Affirmation F.

La fonction f' est décroissante sur $[-1; 0]$.

Sur $[-1; 0]$, la fonction f'' est négative. Donc la fonction f' est décroissante sur $[-1; 0]$.
L'affirmation F est vraie.