

∞ Suites ∞

⌚ 1h  autorisée**I Exercice**

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

- 1) Donner la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
- 2) Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, tracer la courbe de la fonction f , la droite Δ d'équation $y = x$ et les points de l'axe (Ox) d'abscisse u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- 3) Montrer, par un raisonnement par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par 2.
- 4) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

II Exercice

- 1) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $4n > 2(n+1)$.
- 2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $2^n > 2n$.

III Exercice

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - 3n - 2 \end{cases}$$

- 1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- 2) Conjecturer u_n en fonction de n et démontrer votre proposition à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

IV Bonus

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

