

EXERCICE 1

1. (a)
 - I est le milieu de [EF] donc I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.
 - J est le symétrique de E par rapport à F, donc J $(2; 0; 1)$.
- (b) On en déduit les coordonnées des vecteurs $\vec{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{BI} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BG}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI).
 - $\vec{DJ} \cdot \vec{BI} = -1 + 0 + 1 = 0$ donc $\vec{DJ} \perp \vec{BI}$.
 - $\vec{DJ} \cdot \vec{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$ donc $\vec{DJ} \perp \vec{BG}$.

Donc le vecteur $\vec{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan (BGI).
- (c)
 - Le vecteur $\vec{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$.
 - Le point B appartient au plan (BGI) donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan; donc $2x_B - y_B + z_B + d = 0$, ce qui équivaut à $2 - 0 + 0 + d = 0$, ce qui veut dire que $d = -2$.

Donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. (a) La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
- (b) On procède par substitution pour trouver t .

On trouve $t = -\frac{1}{6}$, puis $L \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.
- (c) Le plan (BGI) a pour équation $2x - y + z - 2 = 0$; or $2x_L - y_L + z_L - 2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 2 = 0$, donc $L \in (BGI)$.
3. (a) La pyramide FBGI a pour base le triangle rectangle FBG, et pour hauteur IF.
 - $IF = \frac{1}{2}$
 - Le triangle rectangle FBG a pour aire $\frac{FG \times FB}{2} = \frac{1}{2}$.

Le volume de la pyramide FBGI est donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

- (b) La droite d est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L. Le point F appartient à la droite d , donc on peut dire L est le projeté orthogonal de F sur (BGI). Donc la distance FL est la distance du point F au plan (BGI), autrement dit c'est la hauteur de la pyramide FBGI dont le triangle BGI est la base.

$$FL^2 = \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ donc } FL = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BGI. On exprime le volume de la pyramide FBGI :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times FL \times \mathcal{A} \iff \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \mathcal{A} \iff \frac{3 \times \sqrt{6}}{12} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

L'aire du triangle BGI est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x} - 0,1$.

1. D'après le cours, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -0,1.$$

2. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1)e^{-x} - 0 = (1 - x)e^{-x}$.

Pour tout x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ sur $[0; +\infty[$.

$$f(0) = -0,1; f(1) = e^{-1} - 0,1 \approx 0,27 > 0$$

On construit le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$1 - x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-0,1	$e^{-1} - 0,1$	-0,1

3. $f(0) = -0,1 < 0$ et $f(1) \approx 0,27 > 0$; on complète le tableau de variations

x	0	α	1	$+\infty$
$f(x)$	-0,1	0	$e^{-1} - 0,1$	-0,1

f est continue (car dérivable) et strict. croissante sur $I = [0; 1]$.

Et comme 0 appartient à l'intervalle image de cet intervalle par f , on en déduit (théo de la bijection) que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 1]$.

4. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[\alpha; \beta]$ par $F(x) = -(x+1)e^{-x} - 0,1x$.

La fonction F est dérivable sur $[\alpha; \beta]$ et

$$F'(x) = -1 \times e^{-x} - (x+1) \times (-1)e^{-x} - 0,1 = (-1+x+1)e^{-x} - 0,1 = xe^{-x} - 0,1 = f(x)$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[\alpha; \beta]$.

5. La fonction f est positive sur $[\alpha; \beta]$ donc l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$ est $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

Pour des raisons de symétrie, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$

$$\text{est } \mathcal{A} = 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

$$\mathcal{A} = 2 \times [F(\beta) - F(\alpha)] \approx 2 \times [F(3,577) - F(0,112)] \approx 1,04$$

L'aire du domaine compris entre les deux courbes est approximativement de 1,04 unité d'aire.

6. L'unité sur chaque axe représente 5 mètres, donc une unité d'aire est égale à 25 m².

L'aire du domaine entre les deux courbes est donc approximativement de $1,04 \times 25 = 26 \text{ m}^2$.

On peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré donc sur 26 m² on en disposera $26 \times 36 = 936$ plants de tulipes.

EXERCICE 4

- 1.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier } n, u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^{n+1} \ln(x+1) - \int_0^1 x^n \ln(x+1) \right) dx \\ &= \int_0^1 (x^n(x-1) \ln(x+1)) dx \end{aligned}$$

On a sur $[0;1]$: $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $\ln(x+1) \geq 0$, donc $x^n(x-1) \ln(x+1) \leq 0$.

$$\text{Donc } \int_0^1 (x^n(x-1) \ln(x+1)) dx \leq 0 \quad \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ainsi la suite u est décroissante.

2. (a) $\forall x \in [0;1], 1 \leq x+1 \leq 2$ donc $\ln(x+1) \leq \ln 2$ puisque la fonction $\ln$ est croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\text{D'où : } \forall x \in [0;1], x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2 \quad (\text{car } x^n \geq 0)$$

On en déduit, par conservation de l'ordre par intégration sur un intervalle :

$$\begin{aligned} 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2 &\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2 dx \\ &\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln 2 \right]_0^1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \ln 2 \end{aligned}$$

- (b) Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$, donc (théorème des gendarmes), $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 5 EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{1}{4}; 4 \right]$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

f est du signe de $\ln x$ sur I , donc négative sur $\left[\frac{1}{4}; 1 \right]$ et positive sur $[1; 4]$.

De plus f est continue sur I en tant que produit des fonctions inverse et logarithme, continues sur I .

Donc l'aire cherchée A , en unité d'aire du repère (ua) est donnée par :

$$A = - \int_{\frac{1}{4}}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$$

Or $f = u' u$ avec $u = \ln$, donc une primitive de f sur I est $F = \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} \ln^2$.

$$\text{D'où } A = [-F(x)]_{\frac{1}{4}}^1 + [F(x)]_1^4 = -F(1) + F\left(\frac{1}{4}\right) + F(4) - F(1) = \frac{1}{2} \left[(\ln 4)^2 + \left(\ln \left(\frac{1}{4} \right) \right)^2 \right]$$

$$\text{Or } \ln \left(\frac{1}{4} \right) = -\ln 4$$

$$\text{d'où : } A = (\ln 4)^2 \text{ ua} = (\ln 4)^2 \times 2 \times 3 \text{ cm}^2 = 6(\ln 4)^2 \text{ cm}^2 \approx 11,53 \text{ cm}^2$$