

BAC BLANC spécialité mathématiques

Sujet 2

4 heures

Calculatrice en mode examen autorisée

Exercice 1 (5 points)

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} .

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.

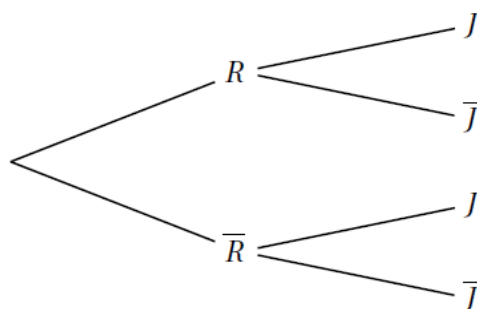
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.

La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.

Cette affirmation est-elle vraie? Justifier votre réponse.

4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées?

Exercice 2 (5 points)

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n) .

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

- b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

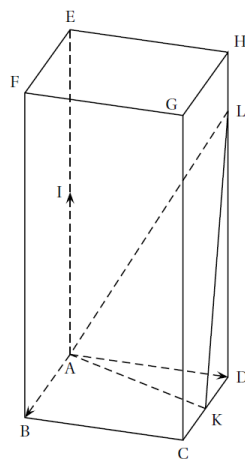
3. On admet que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Exercice 3 (5 points)

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci-dessous. Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$.

On admet que le point L a pour coordonnées $(0; 1; \frac{3}{2})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2.
 - a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6; -3; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
 - c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
 - d. En déduire que le point N de coordonnées $(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49})$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

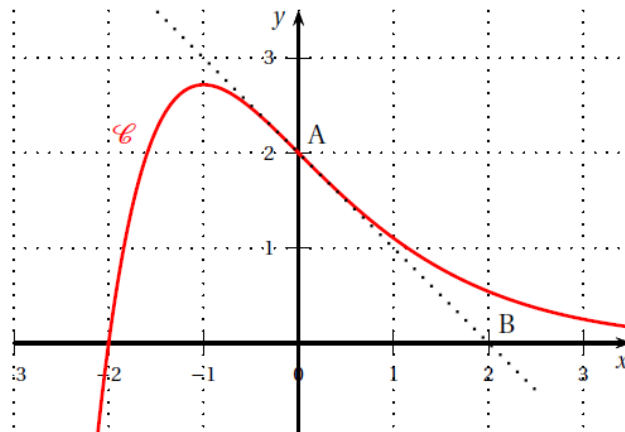
On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3.
 - a. Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.
 - b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).
 - c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Exercice 4 (5 points)

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points $A(0; 2)$ et $B(2; 0)$.

Partie I

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

1. En vous aidant des résultats de la partie 1 : Trouver a et b tel que
$$f(x) = (ax + b) \exp(-x)$$
2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x , $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
 - a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.
2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .
 - a. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
 - b. Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$?