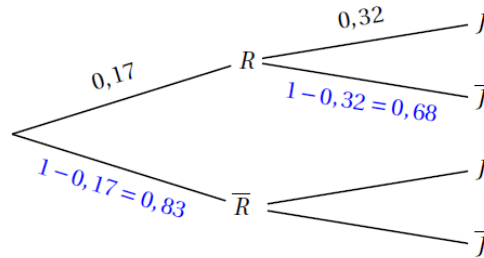


Correction du bac blanc janvier 2022

Exercice 1

1. On représente la situation à l'aide de cet arbre pondéré :



2. $P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544$

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française, donc $P(J) = 0,11$.

La probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $P(\bar{R} \cap J)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(J) = P(R \cap J) + P(\bar{R} \cap J) \text{ donc } P(\bar{R} \cap J) = P(J) - P(R \cap J) = 0,11 - 0,0544 = 0,0556$$

soit 0,056 à 10^{-3} près.

4.
$$P_{\bar{R}}(J) = \frac{P(\bar{R} \cap J)}{P(\bar{R})} = \frac{0,056}{0,83} \approx 0,0675$$

La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ 6,75 %.

Partie B

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. • On interroge une personne au hasard et il n'y a que deux possibilités : elle utilise régulièrement les transports en commun, avec une probabilité $p = 0,17$, ou pas, avec une probabilité de $1 - p = 0,83$.
• On réalise $n = 50$ fois ce questionnement de façon identique.

Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,17$.

2.
$$P(X = 5) = \binom{50}{5} \times 0,17^5 \times (1 - 0,17)^{50-5} \approx 0,069$$

Il y a donc une probabilité de 0,069 que, sur 50 personnes interrogées, exactement 5 prennent régulièrement les transports en commun.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.

Autrement dit, le recenseur affirme que $P(X < 13) \geq 0,95$.

Or $P(X < 13) = P(X \leq 12) \approx 0,929 < 0,95$ donc cette affirmation est fausse.

4. Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est $E(X) = np = 50 \times 0,17 = 8,5$.

Exercice 2

Partie A

- $a_1 = a_0 \times \frac{85}{100} + 450 = 200 \times \frac{85}{100} + 450 = 620$
- Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550 \\ & = 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n \end{aligned}$$

$$v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.

$$\text{b.} \quad \text{On en déduit que, pour tout } n, \text{ on a } v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n.$$

$$\text{c.} \quad \text{Or } u_n = v_n + 3000 \text{ donc, pour tout entier naturel } n, a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000.$$

- Le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise est le nombre entier n tel que $a_n > 2500$; on résout cette inéquation :

$$a_n > 2500 \iff -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \iff 500 > 2800 \times 0,85^n \iff \frac{500}{2800} > 0,85^n$$

$$\iff \ln\left(\frac{500}{2800}\right) > \ln(0,85^n) \iff \ln\left(\frac{5}{28}\right) > n \times \ln(0,85) \iff \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} < n$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} \approx 10,6$, donc le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500 est 11.

Partie B

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

- Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$.
 f est une fonction rationnelle définie sur $[0; +\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$
 $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- Soit $\mathcal{P}$ la propriété $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

• Initialisation

$$u_0 = 1 \text{ et } u_1 = \frac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 2} = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$, soit $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité

On suppose la propriété vraie au rang $n \geq 0$, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc sur $[0; 4]$, donc de la relation $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$, on déduit $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$.

$$f(0) = \frac{4}{2} = 2 \geq 0; f(u_n) = u_{n+1}; f(u_{n+1}) = u_{n+2} \text{ et } f(4) = \frac{24}{6} = 4$$

On a donc : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que pour tout n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

- b. • Pour tout n , on a ; $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
 • Pour tout n , on a ; $u_n \leq 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

La suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$; or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 4$.

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.

Exercice 3

1. Avec $C(1; 1; 0)$ et $D(0; 1; 0)$, on obtient $K\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$, donc $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ et on a $\overrightarrow{AL}\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$.

2. a. $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AK} = 3 - 3 + 0 = 0$;

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AL} = 0 - 3 + 3 = 0$: le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan AKL, il est donc orthogonal à ce plan ; c'est donc un vecteur normal à ce plan.

- b. On a donc $M(x; y; z) \in (\text{AKL}) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff 6x - 3y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$ et comme A appartient à ce plan on a : $0 + 0 + 0 + d = 0$.

Conclusion : $M(x; y; z) \in (\text{AKL}) \iff 6x - 3y + 2z = 0$.

- c. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, donc :

$$M(x; y; z) \in \Delta \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{DM} = t \overrightarrow{n} \iff \begin{cases} x &= 6t \\ y - 1 &= -3t \\ z &= 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x &= 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- d. Le point N est donc le point commun au plan (AKL) et à la droite Δ , donc ses coordonnées $(x; y; z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \implies 6 \times 6t + (-3) \times (1 - 3t) + 2 \times 2t = 0 \iff 6x - 3y + 2z = 0$$

$36t - 3 + 9t + 4t = 0 \iff 49t = 3 \iff t = \frac{3}{49}$; en remplaçant dans les trois premières équations du système, on obtient :

$$\begin{cases} x = 6 \times \frac{3}{49} \\ y = 1 - 3 \times \frac{3}{49} \\ z = 2 \times \frac{3}{49} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{18}{49} \\ y = \frac{40}{49} \\ z = \frac{6}{49} \end{cases} . \text{ Conclusion : } N\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49}\right).$$

3. a. Le triangle ADK est rectangle en D; on a par définition $AD = 1$ et $DK = \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}(\text{ADK}) = \frac{AD \times DK}{2} = \frac{1}{4}.$$

D'autre part $DL = \frac{3}{2}$, donc

$$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{8}.$$

- b. On a $\overrightarrow{DN}\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49} - 1; \frac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{DN}\left(\frac{18}{49}; -\frac{9}{49}; \frac{6}{49}\right)$, donc :

$$DN^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(-\frac{9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2 = \frac{18^2 + 9^2 + 6^2}{49^2} = \frac{324 + 81 + 36}{49^2} = \frac{441}{49^2} = \frac{21^2}{49^2} = \left(\frac{21}{49}\right)^2.$$

$$\text{Donc } DN = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

- c. En prenant comme base le triangle AKL, on a :

$$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{\mathcal{A}(\text{AKL}) \times DN}{3}, \text{ soit } \frac{1}{8} = \frac{\mathcal{A}(\text{AKL}) \times \frac{3}{7}}{3}, \text{ d'où}$$

$$\mathcal{A}(\text{AKL}) = 7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ (u. a.)}.$$

Exercice 4

Partie 1

1. • A a pour ordonnée $f(0) = 2$;

• Le nombre dérivé $f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$.

2. La fonction f semble convexe sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie 2

1. $f(0) = 2 \iff b = 2$

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}$$

$$f'(0) = -1 \iff a - 2 = -1 \iff a = 1$$

$$f(x) = (x + 2)e^{-x} = \frac{x+2}{e^x}$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) = -\infty$ par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (croissances comparées) par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Partie 3

1. a. $f'(x) = e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1-x-2) = e^{-x}(-x-1)$

b. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$. Donc :

$$-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1;$$

$$-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1;$$

$$-x-1 = 0 \iff -1 = x.$$

La fonction est donc croissante sur $] -\infty ; -1[$, décroissante sur $] -1 ; +\infty[$ et a donc un maximum $f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = e$.

2. $f''(x) = -e^{-x}(-x-1) + e^{-x}(-1) = xe^{-x}$

b. D'après le résultat précédent sur $[0 ; +\infty[$, $x \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, donc le produit $xe^{-x} \geq 0$: la dérivée seconde est positive, la fonction f est convexe sur $[0 ; +\infty[$.