

BAC BLANC spécialité mathématiques

Sujet 2

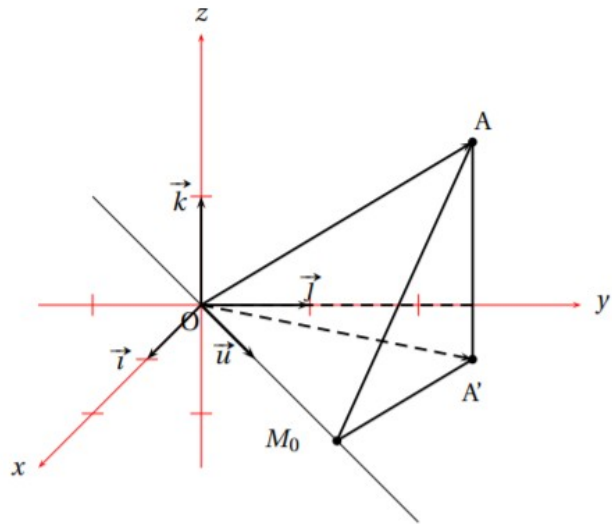
4 heures

Calculatrice en mode examen autorisée

Exercice 1 (5 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère

- le point A de coordonnées $(1; 3; 2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d , le point M ayant pour coordonnées $(t; t; 0)$.

a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$

b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2; 2; 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.

On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1; 3; 0)$.

Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

Exercice 2 (6 points)

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

La leucose féline est une maladie touchant les chats; elle est provoquée par un virus.

Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.

On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.

Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie »;
- T : « Le test du chat est positif »;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

- a. Traduire la situation par un arbre pondéré.
 - b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
 - c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.
 - d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.

- a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X .
 - b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.
 - c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.
 - d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

- a. Montrer que $p_n = 1 - 0,55^n$.

b.

Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil() :  
    n = 0  
    P = 0  
    while P < 0,99 :  
        n = n + 1  
        P = 1 - 0,55 ** n  
    return n
```

- c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice 3 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

1.

La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n .

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question 5.), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question 6.).

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions 2. et 3. concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .

En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4 (5 points)

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$.

Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geq 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en $\mu\text{g/mL}$) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1.
 - a. Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?
 - b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
 - c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Vérifier que pour tout nombre réel t positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4 - t)e^{-\frac{1}{4}t}.$$

3.
 - a. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).
 - b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal?
Quel est alors ce taux? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4.
 - a. Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0 ; 4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.
En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4 ; +\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.

On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.

- b. Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$ dans le sang.