

Correction du BAC Blanc sujet 1

EXERCICE 4 (5 points) Amérique du Sud novembre 2019

1. $f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2$ avec $t \geq 0$.

1.a. $f(0) = 3 \times 0 \times e^0 + 2 = 2$

1a 0,25

1.b. 12 secondes correspond à $\frac{1}{5}$ de minute soit 0,2 minute.

1b 0,25

$$f(0,2) = 3 \times 0,2 \times e^{-0,05} + 2 = 2,571 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$2,571 > 2,5$ donc **douze secondes après l'hémorragie, le taux de vasopressine n'est pas normal.**

1.c. $te^{-\frac{1}{4}t} = te^{-0,25t} = \frac{t}{e^{0,25t}} = 4 \times \frac{0,25t}{e^{0,25t}}$

1c 0,5

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (0,25t) = +\infty \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{e^T}{T} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,25t}}{0,25t} = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,25t}{e^{0,25t}} = 0.$$

Conséquence

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 3te^{-\frac{1}{4}t} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2.$$

La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

+0,25

À long terme, le taux de vasopressine devient voisin de 2.

2. $(e^u)' = u' e^u \quad \left(e^{-\frac{1}{4}t}\right)' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}$

2 1

$$f'(t) = 3 \times 1 \times e^{-\frac{1}{4}t} + 3t \left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\right) = \left(3 - \frac{3}{4}t\right)e^{-\frac{1}{4}t} = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}$$

3.a. Pour tout nombre réel t positif ou nul $e^{\frac{1}{4}t} > 0$ donc le signe de $f'(t)$ est le signe de $(4-t)$.

3a 1

Si $0 \leq t < 4$ alors $f'(t) > 0$ et f est strictement croissante sur $[0; 4[$.

Si $4 < t$ alors $f'(t) < 0$ et f est strictement décroissante sur $]4; +\infty[$

Tableau de variation

t	0	4	$+\infty$
$f'(t)$		0	
$f(t)$	2	M	2

3.b. Le taux de vasopressine est maximal pour $x=4$ est $M = f(4) = 6,41$ à 10^{-2} près.

3b 0,5

4.a. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 4]$, $f(0)=2$ et $f(4)=6,41$, 2,5 appartient à l'intervalle $[2; 6,41]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre réel t_0 tel que $f(t_0)=2,5$.

4a 0,75

En utilisant la calculatrice, on obtient $0,174 < t_0 < 0,175$ et $t_0 = 0,174$ à 10^{-3} près.

4b 0,5

4.b. La fonction f est strictement croissante sur $[0; 4]$ et $t_0 = 0,174$.

Si $t_0 < t \leq 4$ alors $f(t_0) = 2,5 < f(t)$

La fonction f est strictement décroissante sur $]4; +\infty[$ et $t_1 = 18,93$.

Si $4 < t < t_1$ alors $f(t) > f(t_1) = 2,5$.

Conséquence

$$f(t) > 2,5 \Leftrightarrow t_0 < t < t_1$$

$$t_1 - t_0 = 18,93 - 0,174 = 18,716$$

716 millièmes de minute correspond à $\frac{60 \times 716}{1000} = 43$ secondes à l'unité près.

Conclusion

Le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 $\mu\text{g/mL}$ dans le sang pendant 18 min 43s.

Correction du BAC Blanc sujet 1

Exercice 1 (5 points) (Exercice A de la métropole du 7 juin 2021 sans le 5)

1 1point

1. $M(x; y; z) \in (d) \iff \overrightarrow{OM} = t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. a. De $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} t-1 \\ t-3 \\ 0-2 \end{pmatrix}$, on calcule :

2a 1

$$AM^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 = t^2 + 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t + 4 = 2t^2 - 8t + 14.$$

b. $2t^2 - 8t + 14 = 2(t^2 - 4t + 7) = 2[(t-2)^2 - 4 + 7] = 2[(t-2)^2 + 3].$

2b 1

La plus petite valeur de ce trinôme est obtenue quand le carré est nul, soit pour $t = 2$.

On a $2t^2 - 8t + 14 \geq 6$, soit $AM^2 \geq 6 \Rightarrow AM \geq \sqrt{6}$.

La plus petite distance est $AM_0 = \sqrt{6}$ avec $M_0(2; 2; 0)$.

3. On a $\overrightarrow{AM_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) .

3 1

On a $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

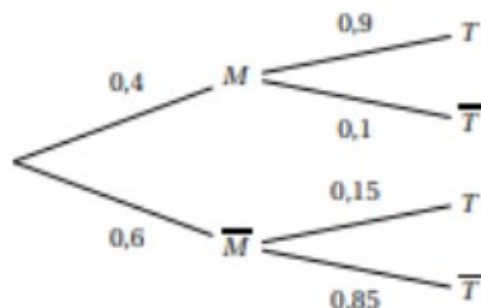
4. $\vec{u}$ est orthogonal au plan horizontal d'équation $z = 0$. Comme A' et M_0 appartiennent à ce plan le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{A'M_0}$.

4 1

Donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(AA'M_0)$, donc la droite (d) est orthogonale au plan $(AA'M_0)$. Le point M_0 est donc le projeté orthogonal de O sur le plan $(AA'M_0)$, donc OM_0 est la distance la plus courte du point O au plan $(AA'M_0)$.

Correction du BAC Blanc sujet 1

Exercice 2 (6 points) (Exercice 2 Métropole du 8 juin 2021)



1a 0,25

b. Il faut trouver $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

1b 0,25

c. On a de même $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.

1c 0,25

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,36 + 0,09 = 0,45.$$

+0,75

d. Il faut trouver $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,36}{0,45} = \frac{36}{45} = \frac{9 \times 4}{9 \times 5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8$.

1d 0,5

2. a. On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question 1. c.

2a 0,75

b. On a $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times (1 - 0,45)^{20-5} = 15\,504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,0365$ soit environ 0,037.

2b 0,75

c. La calculatrice donne $P(X < 9) \approx 0,414$.

2c 0,25

d. On sait que l'espérance $E = n \times p = 20 \times 0,45 = 9$.

Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons il y aura en moyenne 9 chats positifs par échantillon de 20.

2d 0,5

+ 0,25

3. a. On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de 0,45.

$$\text{On a } P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n.$$

$$\text{Donc } p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^n.$$

3a 0,5

b. En partant de $n = 0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

3b 0,5

c. On cherche donc n tel que $1 - 0,55^n \geq 0,99 \iff 0,01 \geq 0,55^n$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 \geq n \ln 0,55 \iff \frac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \leq n$ (car $\ln 0,01 < 0$).

3c 0,5

$$\text{Or } \frac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \approx 7,7.$$

Conclusion : le programme renvoie la valeur 8.

On comptera le max de point si n est obtenu par essais successifs à la calculatrice car la fonction ln n'a pas été vue par tous les élèves

Correction du BAC Blanc sujet 1

Exercice 3 (4 points) (exercice 3 Métropole du 8 juin 2021)

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour n , $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}$.

1. On peut conjecturer que quel que soit n , $\frac{4}{u_n} = n + 4$. 1. 0,25

2. On veut démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$. 2. 1

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$: la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$.

Alors $u_n + 4 > 4 > 0$ donc : $\frac{1}{u_n + 4} > 0$ et donc $\frac{4}{u_n + 4} > 0$

Or $u_n > 0$ (hypothèse de récurrence) donc $\frac{4u_n}{u_n + 4} > 0$.

Soit finalement : $u_{n+1} > 0$; la proposition est vraie au rang $n + 1$.

La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 4} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = -\frac{u_n^2}{u_n + 4}$.

Comme $u_n + 4 > 4 > 0$ d'où l'inverse $\frac{1}{u_n + 4} > 0$ et comme $u_n^2 > 0$, $\frac{u_n^2}{u_n + 4} > 0$ et finalement

$$-\frac{u_n^2}{u_n + 4} < 0.$$

On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de la convergence monotone, la suite est convergente vers un réel $\ell \geq 0$ 4. 0,25

5. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4}{u_{n+1}} - \frac{4}{u_n} = \frac{4}{\frac{4u_n}{u_n + 4}} - \frac{4}{u_n} = \frac{4(u_n + 4)}{4u_n} - \frac{4}{u_n} = \frac{u_n + 4}{u_n} - \frac{4}{u_n} = \frac{u_n + 4 - 4}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1.$$

$v_{n+1} - v_n = 1$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

Son premier terme est $v_0 = \frac{4}{u_0} = \frac{4}{1} = 4$.

6. On sait qu'alors pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr = 4 + n$.

Or $v_n = \frac{4}{u_n} \iff u_n = \frac{4}{v_n}$ donc $u_n = \frac{4}{4 + n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_n = \frac{4}{4 + n}$, donc comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{n}{4} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La limite de la suite (u_n) est donc 0.

3. 0,75
(0,5 pour l'étude
du signe et 0,25
pour la
conclusion)

6 0,5 pour
l'expression de
(u_n) en fct de n
+ 0,5 pour la
limite.