∽ Baccalauréat Métropole 13 septembre 2021 J2 ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

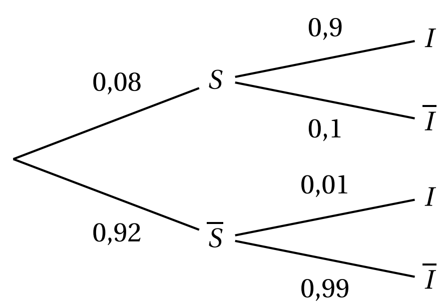
Candidats libres

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1.



2. **a.** On a $P(S \cap I) = P(S) \times P_S(I) = 0,08 \times 0,9 = 0,072$

b. On a de même $P\left(\overline{S} \cap I\right) = P\left(\overline{S}\right) \times P_{\overline{S}}(I) = 0,92 \times 0,01 = 0,009\,2$.
D'après la loi des probabilités totales :
$P(I) = P(S \cap I) + P\left(\overline{S} \cap I\right) = 0,072 + 0,009\,2 = 0,081\,2$.

c. Il faut calculer $P_I(S) = \dfrac{P(I \cap S)}{P(I)} = \dfrac{0,072}{0,081\,2} \approx 0,887$ soit 0,89 au centième près.

3. **a.** Les tirages étant indépendants les uns des autres et étant assez nombreux on peut considérer que la variable Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,08$.

b. On a $P(Z = 0) = 0,08^0 \times 0,92^{50} \approx 0,015\,466$;
$P(Z = 1) = \binom{50}{1} \times 0,08 \times 0,92^{49} \approx 0,067\,426$, donc
$P(Z \geqslant 2) = 1 - [P(Z = 0) + P(Z = 1)] = 1 - (0,015\,466 + 0,067\,426) \approx 0,917$, soit 0,92 au centième près.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour $t = -2$, on trouve les coordonnées de B.

2. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ admet pour coordonnées : $\left(2 - 1\ ;\ 1 - 0\ ;\ 0 - 2\right)$ soit $\left(1\ ;\ 1\ ;\ -2\right)$

3. $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{AB})$ s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AB}}$ soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 1 &=& 1 \times t \\ y - 0 &=& 1 \times t \\ z - 2 &=& -2 \times t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 + t \\ y &=& t \\ z &=& 2 - 2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

En posant $t = 1 - u$, on obtient :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \left\{\begin{array}{l c l}x &=& 2-u\\ y &=& 1-u\\ z &=& \phantom{1-{}}2u\end{array}\right.$ $u \in \mathbb{R}$. Donc réponse B.

4. La droite Δ a pour vecteur directeur $\delta\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Soit $\mathscr{P}$ le plan dont on cherche une équation.

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{\text{C}M}\cdot\delta = 0 \iff 2(x-0)+1(y-1)-1(z-2) = 0 \iff$

$2x+y-1-z+2 = 0 \iff 2x+y-z+1 = 0$.

5. En faisant apparaître le point A dans chaque vecteur (Chasles), on obtient :

$\overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{AD}} = 3\overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{AC}} \iff \overrightarrow{\text{AD}} = -\overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AC}}$: le vecteur $\overrightarrow{\text{AD}}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$, ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \text{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. • On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{-2x} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -\text{e}^{-2x} = -\infty$; donc par somme de limites :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

• On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-2x} = 0$; donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. la fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = 1-(-2)\text{e}^{-2x} = 1+2\text{e}^{-2x}$.

On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{e}^{-2x} > 0$, donc $1+2\text{e}^{-2x} > 1 > 0$. La dérivée est positive donc la fonction f est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini.

3. La fonction f est continue car dérivable et strictement croissante ; comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$f(0) = -1$ et $f(1) \approx 0,865$, donc $0 < \alpha < 1$;

$f(0,4) \approx -0,05$ et $f(0,5) \approx 0,13$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$;

$f(0,42) \approx -0,01$ et $f(0,43) \approx 0,007$, donc $0,42 < \alpha < 0,43$.

4. On a donc :

- sur $]-\infty~;~\alpha[$, $f(x) < 0$;
- sur $]\alpha~;~+\infty[$, $f(x) > 0$;
- et $f(\alpha) = 0$.

Partie II

1.

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \text{e}^{-2t}}$$

a. Soit $u(t) = t^2 + \text{e}^{-2t}$, donc $h(t) = \sqrt{u(t)}$ fonction dérivable car composée de deux fonctions « racine » et h dérivables.
Donc $h'(t) = \dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \dfrac{2t - 2\text{e}^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + \text{e}^{-2t}}} = \dfrac{t - \text{e}^{-2t}}{\sqrt{t^2 + \text{e}^{-2t}}} = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \text{e}^{-2t}}}$.

b. Le dénominateur étant positif, le signe de $h'(t)$ est celui du numérateur soit $f(t)$ dont on a vu le signe dans la partie I.

Donc :

- sur $]-\infty~;~\alpha[$, $f(t) < 0$ donc $h'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle;
- sur $]\alpha~;~+\infty[$, $f(x) > 0$ donc $h'(t) > 0$: la fonction est strictement croissante sur cet intervalle;
- et $f(\alpha) = 0$, donc $h(\alpha)$ est le minimum de la fonction h.

La distance OM est donc minimale pour $t = \alpha$ et l'ordonnée de M est alors $\text{e}^{-\alpha}$.

Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point A$(\alpha~;~\text{e}^{-\alpha})$.

α est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Il suffit de tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point, elle coupe $\mathscr{C}$ au point A

2. **a.** Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $g'(\alpha) = -\text{e}^{-\alpha}$

b. D'après le rappel le produit des coefficients directeurs est $-\text{e}^{-\alpha} \times \dfrac{\text{e}^{-\alpha}}{\alpha} = -\dfrac{\text{e}^{-2\alpha}}{\alpha}$.

or on sait que $f(\alpha) = 0 \iff \alpha - \text{e}^{-2\alpha} = 0 \iff \alpha = \text{e}^{-2\alpha} \iff \dfrac{\text{e}^{-2\alpha}}{\alpha} = 1$, donc finalement le produit des coefficients directeurs est égal à -1. La droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Voir à la fin.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Suites numériques; raisonnement par récurrence.

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5\,;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{l c l} u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. • $u_1 = \dfrac{3 \times 16 + 2 \times 5}{5} = \dfrac{58}{5}$;
   • $v_1 = \dfrac{16 + 5}{2} = \dfrac{21}{2}$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
   a. On a quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
   $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{6u_n + 4v_n - 5u_n - 5v_n}{10} = \dfrac{u_n - v_n}{10} = \dfrac{w_n}{10}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $w_{n+1} = \dfrac{1}{10} w_n$ montre que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10} = 0,1$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 16 - 5 = 11$.
   On sait qu'alors pour tout naturel n, $\;w_n = 11 \times (0,1)^n$.
   b. Comme $0,1 > 0 \Rightarrow 0,1^n > 0$ et $11 > 0$, donc la suite (w_n) est une suite de nombres supérieurs à zéro.
   D'autre part $0 < 0,1 < 1$ entraine que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0,1^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$.
3. **a.** Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - \dfrac{5u_n}{u_n} = \dfrac{-2u_n + 2v_n}{5} = -\dfrac{2}{5}(u_n - v_n) = -\dfrac{2}{5} w_n = -\dfrac{4}{10} w_n = -0,4 w_n$
   b. On a vu à la question 2. b. que $w_n > 0$, quel que soit le naturel n, donc $-0,4w_n < 0$ et par conséquent :
   $u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

   On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $\;v_n \geqslant v_0 = 5$.

   c. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
   Initialisation : On a $u_0 = 16 \geqslant 5$: la proposition est vraie au rang $n = 0$.
   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $\;$on a $u_n \geqslant 5$.
   On a donc $3u_n \geqslant 15$ (1) et comme on a admis que $v_n \geqslant 5$, on a $2v_n \geqslant 10$ (2).
   On peut ajouter membre à membre (1) et (2) pour obtenir :
   $3u_n + 2v_n \geqslant 25$ d'où en multipliant par le nombre positif $\dfrac{1}{5}$:

$\dfrac{3u_n+2v_n}{5} \geqslant 5$ et finalement $u_{n+1} \geqslant 5$.

Conclusion : la minoration par 5 est vraie au rang 0 et si elle vraie au tang n, elle l'est aussi au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence on a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 5$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 5 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 5$.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. **a.** On a vu à la question 2.b. que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ ou encore que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Les deux suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ et donc que $\ell = \ell'$.

b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.

Donc : $c_{n+1} = 5u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2(u_n + v_n) = 3u_n + 2v_n + 2u_n + 2v_n$
$= 5u_n + 4v_n = c_n$.

Donc la suite (c_n) est constante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 = 5u_0 + 4v_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 80 + 20 = 100$.

c. Puisque $c_n = 5u_n + 4v_n$ et que (u_n) et (v_n) ont même limite ℓ, on a donc :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} 100 = 100 = 5\ell + 4\ell = 9\ell$.

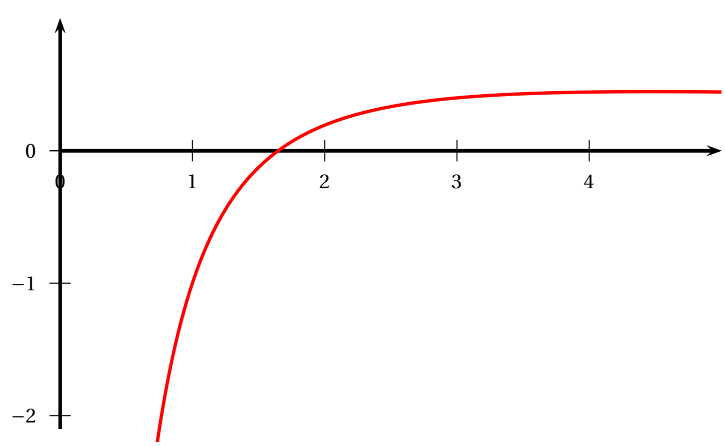
$9\ell = 100$ donc $\ell = \dfrac{100}{9}$.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme, limites, dérivation.

Partie 1

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Dans $]0~;~+\infty[$, $f(x) = 0 \iff \dfrac{2\ln(x) - 1}{x} = 0$, on a donc

$2\ln(x) - 1 = 0 \iff 2\ln(x) = 1 \iff \ln(x) = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

$S = \left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right\}$.

Rem. $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}} \approx 1,649 \approx 1,65$ au centième près.

2. • Sur $\left]0~;~\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $f(x) < 0$;

• Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}~;~+\infty\right[$, on a $f(x) > 0$;

• $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 0$.

Partie II

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. **a.** On a $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} (-\ln x) = +\infty$, donc par somme de limites :

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$.

b. $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$. Comme

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$, on obtient par produit :

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2. La fonction $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = \dfrac{1}{x} \times [\ln(x) - 1] + \ln(x) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}[\ln(x) - 1 + \ln(x)] = \dfrac{1}{x} \times (2\ln(x) - 1) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x} = f(x)$.

3. Le signe de $f(x) = g'(x)$ a été trouvé à la question 2 de la partie I; on a donc :

• Sur $\left]0~;~\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $g'(x) < 0$: la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle

• Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}~;~+\infty\right[$, on a $g'(x) > 0$: la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle

• $g'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 0$: $g\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $]0~;~+\infty[$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Comme $-\frac{1}{4} = -0,25$, le tableau de variations montre que l'équation $g(x) = m$, avec $m > -0,25$ a deux solutions, l'une sur l'intervalle $\left]0~;~\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, l'autre sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}~;~+\infty\right[$.

5. Dans $]0~;~+\infty[$, $g(x) = 0 \iff \ln(x)[\ln(x) - 1] = 0 \iff \left\{\begin{array}{l c l}\ln(x) & = & 0\\ \ln(x) - 1 & = & 0\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{l c l}\ln(x) & = & 0\\ \ln(x) & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}x & = & 1\\ x & = & \text{e}\end{array}\right.$

$S = \{1~;~\text{e}\}$.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3