Corrigé du baccalauréat Métropole 8 juin 2021

Candidats libres Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Question 1 : On voit que pour $t = 5$, les coordonnées du point de la droite $\mathcal{D}'$ sont $(11~;~-9~;~-22)$ soit les coordonnées de M_2.

Réponse b.

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est : $\overrightarrow{u}_3\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$.

Réponse c.

Question 3 :

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ou encore colinéaire au vecteur $-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-1\\+1\\2\end{pmatrix}$.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ayant des vecteurs directeurs colinéaires au même vecteur sont donc parallèles.
De plus en remplaçant t par $\dfrac{5}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}'$ on obtient $x = 1$, $y = 1$ et $z = -2$.
Les droites sont parallèles et ont un point commun : elles sont donc confondues.

Réponse d.

Question 4 : $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}1\\m\\-2\end{pmatrix}$.

$\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{p}$ sont orthogonaux, soit :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{p} = 0 \iff -2\times 1 + 2\times m + 4\times(-2) = 0 \iff -2 + 2m - 8 = 0 \iff 2m = 10 \iff m = 5.$

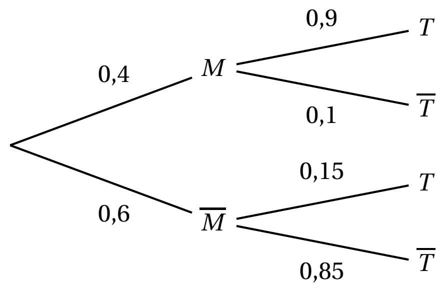
Réponse c.

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. **a.** On traduit la situation par un arbre pondéré.



b. Il faut trouver $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

c. On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,36 + 0,09 = 0,45$.

d. Il faut trouver $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,36}{0,45} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{9 \times 4}{9 \times 5} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10} = 0,8$.

2. **a.** On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question **1. c.**.

b. On a $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times (1 - 0,45)^{20-5} = 15\,504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,036\,5$ soit environ 0,037.

c. La calculatrice donne $P(X < 9) \approx 0,414$.

d. On sait que l'espérance $E = n \times p = 20 \times 0,45 = 9$.

Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons il y aura en moyenne 9 chats positifs par échantillon de 20.

3. **a.** On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de $0,45$.

On a $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n$.

Donc $p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^n$.

b. En partant de $n = 0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

c. On cherche donc n tel que $1 - 0,55^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,55^n$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,55 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \leqslant n$ (car $\ln 001 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \approx 7,7$.

Conclusion : le programme renvoie la valeur 8.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 4}$.

1. On peut conjecturer que quel que soit n, $\dfrac{4}{u_n} = n + 4$.
2. On veut démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

   Initialisation : $u_0 = 1 > 0$: la proposition est vraie au rang 0.

   Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$.

   Alors $u_n + 4 > 4 > 0$ donc : $\dfrac{1}{u_n + 4} > 0$ et donc $\dfrac{4}{u_n + 4} > 0$

   Or $u_n > 0$ (hypothèse de récurrence) donc $\dfrac{4u_n}{u_n + 4} > 0$.

   Soit finalement : $u_{n+1} > 0.$; la proposition est vraie au rang $n + 1$.

   La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n + 1$.

   D'après le principe de récurrence on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n}{u_n+4} - u_n = \dfrac{4u_n - u_n^2 - 4u_n}{u_n+4} = -\dfrac{u_n^2}{u_n+4}$.

   Comme $u_n + 4 > 4 > 0$ d'où l'inverse $\dfrac{1}{u_n+4} > 0$ et comme $u_n^2 > 0$, $\dfrac{u_n^2}{u_n+4} > 0$ et finalement $-\dfrac{u_n^2}{u_n+4} < 0$.

   On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de la convergence monotone, la suite est convergente vers un réel $\ell \geqslant 0$

5. On a pour $n \in \mathbb{N}$,
   $v_{n+1} - v_n = \dfrac{4}{u_{n+1}} - \dfrac{4}{u_n} = \dfrac{4}{\frac{4u_n}{u_n+4}} - \dfrac{4}{u_n} = \dfrac{4(u_n+4)}{4u_n} - \dfrac{4}{u_n} = \dfrac{u_n+4}{u_n} - \dfrac{4}{u_n} = \dfrac{u_n+4-4}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n} = 1$.

   $v_{n+1} - v_n = 1$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

   Son premier terme est $v_0 = \dfrac{4}{u_0} = \dfrac{4}{1} = 4$.

6. On sait qu'alors pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr = 4 + n$.

   Or $v_n = \dfrac{4}{u_n} \iff u_n = \dfrac{4}{v_n}$ donc $u_n = \dfrac{4}{4+n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

   $u_n = \dfrac{1}{1+\frac{n}{4}}$, donc comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{n}{4} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   La limite de la suite (u_n) est donc 0.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme ; dérivation

Partie 1

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

1. ✦ Limite en 0 : $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln(x)}{x}$.

   On sait que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$; donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to0} h(x) = -\infty$.

   ✦ Limite en $+\infty$: on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc par produit et somme de limites : $\lim\limits_{x\to0} h(x) = 1$. (La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la représentation graphique de h en $+\infty$.)

2. La fonction est dérivable (admis) sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^3}$.

3. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$ donc $x^3 > 0$: le signe de $h'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - 2\ln x$.

   ✦ $1-2\ln x > 0 \iff 1 > 2\ln x \iff \dfrac{1}{2} > \ln x \iff \ln x < \dfrac{1}{2}$, soit finalement $x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ $\left(\text{ou encore } x < \sqrt{\mathrm{e}}\right)$

4. D'après les résultats précédents, on établit le tableau de variations de h sur $]0\,;\,+\infty[$.

   $h\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2} = 1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}} = 1 + \dfrac{1}{2\mathrm{e}} \approx 1,18$

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$h(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$1+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

D'après ce tableau de variations, l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$.

On appelle α cette solution ; $h\left(\dfrac{1}{2}\right)\approx -1,8<0$ et $h(1)=1>0$ donc $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$.

5. D'après les questions précédentes, on peut établir le tableau signes de $h(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	||	$-$	0	$+$	

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f_1(x)=x-1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et $f_2(x)=x-2-\dfrac{2\ln(x)}{x^2}$.

On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f_1(x)-f_2(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{x^2}-\left(x-2-\frac{2\ln(x)}{x^2}\right)=x-1-\frac{\ln(x)}{x^2}-x+2+\frac{2\ln(x)}{x^2}=1+\frac{\ln(x)}{x^2}=h(x)$$

2.
- On a vu que $h(x)<0$ sur $]0\,;\,\alpha[$, donc sur cet intervalle $f_1(x)<f_2(x)$ donc $\mathscr{C}_1$ est en dessous de $\mathscr{C}_2$.
- On a vu que $h(x)>0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, donc sur cet intervalle $f_1(x)>f_2(x)$ donc $\mathscr{C}_1$ est au dessus de $\mathscr{C}_2$.
- $h(\alpha)=0$ donc $f_1(\alpha)=f_2(\alpha)$; donc α est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
- L'ordonnée de ce point d'intersection est $f(\alpha)=\alpha-1-\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}=\alpha-\left(1+\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}\right)=\alpha-h(\alpha)=\alpha$.
- Les deux courbes se coupent donc au point de coordonnées $(\alpha\,;\,\alpha)$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

Fonction exponentielle ; dérivation ; convexité

Partie 1

1. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
- la fonction f' est positive sur $]-\infty\,;\,1[$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle ;
- la fonction f' est négative sur $]1\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

2. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
- la fonction f' est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
- la fonction f' est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

D'après le cours : $\displaystyle\lim_{x \to ++\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

De plus $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, comme asymptote horizontale en $+\infty$.

On admet que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (1 - x - 2)\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$; donc $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = -1$.

$f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$; on établit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

c. Sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$, la fonction f est strictement croissante et continue car dérivable sur cetintervalle. $f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = \mathrm{e} > 2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$.

3. $f''(x) = (-1) \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (-1 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$

$\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x, donc $f''(x)$ est du signe de x.

- Sur $]-\infty\,;\,0[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
- Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
- En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$ est le point d'inflexion de cette courbe.