
UE SA03U050

**Corrigé de l'épreuve de Mathématiques
appliquées aux sciences 3**

NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Document et/ou matériel autorisés : AUCUN

Durée totale de l'épreuve : 1h30

- Le sujet comporte 12 pages (page de garde et de complément de réponse incluses).
- La réponse à chaque question devra être rédigée sur ce cahier-réponses, dans le cadre prévu à cet effet. Si nécessaire, la copie de couverture pourra être utilisée comme complément de réponse, à condition de bien préciser le numéro de l'exercice et de la question et d'indiquer le report au niveau de la case correspondante.
- On prendra soin de faire apparaître les étapes intermédiaires principales des calculs dans les réponses données.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

On considère le système (S) :

$$\begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ -x+2y-2z=2 \\ 2x+4y+5z+4t=0 \\ 4y+z-t=3 \end{cases}$$

1) Définir la matrice A associée au système (S).

Le système (S) peut s'écrire sous forme matricielle : $AX = B$, avec :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Calculer le déterminant de la matrice A en expliquant les différentes étapes du calcul. Le système (S) admet-il une solution unique ? Justifiez votre réponse.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} = (-1)^{2+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} = (-1)^{1+1} \times 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 4 \times (-6 - 4) = -40 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \text{le système (S) admet une solution unique.}$$

3) Résoudre le système (S) par la méthode de Gauss. Toutes les opérations effectuées à chacune des étapes de la résolution devront être précisées (la notation en tiendra compte).

$$\begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ -x+2y-2z=2 \\ 2x+4y+5z+4t=0 \\ 4y+z-t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ 4y-z+t=3 \\ 3z+2t=-2 \\ 4y+z-t=3 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ 4y-z+t=3 \\ 3z+2t=-2 \\ 2z-2t=0 \end{cases} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ 4y-z+t=3 \\ 3z+2t=-2 \\ 5z=-2 \end{cases} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ 4y-z+t=3 \\ 3z+2t=-2 \\ z=-2/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ 4y-z+t=3 \\ -6/5+2t=-2 \\ z=-2/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ 4y-z+t=3 \\ -3/5+t=-1 \\ z=-2/5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ 4y-z+t=3 \\ t=-1+3/5=-2/5 \\ z=-2/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ y=3/4 \\ t=-2/5 \\ z=-2/5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y-z-t=1-6/4+4/5=(20-30+16)/20=3/10 \\ y=3/4 \\ t=-2/5 \\ z=-2/5 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=3/10 \\ y=3/4 \\ t=-2/5 \\ z=-2/5 \end{cases}}$$

Le système (S) admet donc une solution unique : $\boxed{\left\{\frac{3}{10}; \frac{3}{4}; -\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}\right\}}$ ou $\{0,3; 0,75; -0,4; -0,4\}$.

Exercice 2

Soit la matrice A telle que : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

1) Calculer son déterminant en expliquant les différentes étapes de calcul.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ -10 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} = -2 \times (-35 + 20) = 30$$

$$C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\det A = 30}.$$

Remarque : $\det A \neq 0 \Rightarrow$ la matrice A est inversible.

2) Calculer la comatrice de A (ou matrice des cofacteurs), $Com A$.

$$ComA = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(0-10) & -(24-4) & +(20-0) \\ -(12-20) & +(6-8) & -(5-4) \\ +(4-0) & -(2-16) & +(0-8) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ComA = \begin{pmatrix} -10 & -20 & 20 \\ 8 & -2 & -1 \\ 4 & 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

3) En déduire la matrice inverse de la matrice A. Effectuer la vérification.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (ComA)^T = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -10 & -20 & 20 \\ 8 & -2 & -1 \\ 4 & 14 & -8 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -10 & 8 & 4 \\ -20 & -2 & 14 \\ 20 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Vérification :

$$A^{-1}A = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -10 & 8 & 4 \\ -20 & -2 & 14 \\ 20 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -10+32+8 & -20+0+20 & -40+16+24 \\ -20-8+28 & -40+0+70 & -80-4+84 \\ 20-4-16 & 40+0-40 & 80-2-48 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Exercice 3

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$

1) Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ associé à la matrice A. On montrera qu'il peut s'écrire sous la forme factorisée : $P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & -3/2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & -3/2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & -3/2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -2 + \lambda & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$P_A(\lambda) = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & -3/2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2 \times (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & -3/2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 \times (1/2 - \lambda - 3/2) = (2 - \lambda)^2 \times (-\lambda - 1)$$

$$P_A(\lambda) = -(2 - \lambda)^2 \times (\lambda + 1) = -(\lambda - 2)^2 (\lambda + 1).$$

2) En déduire les valeurs propres de la matrice A et leur multiplicité.

La matrice A admet donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$, qui sont les racines de son polynôme caractéristique.

$\lambda_1 = -1$ est racine simple du polynôme donc c'est une **valeur propre simple** de la matrice A .

$\lambda_2 = 2$ est racine double du polynôme donc c'est une **valeur propre double** de la matrice A .

3) Déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres de A .

Les vecteurs propres $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ associés à la valeur propre λ vérifient : $AY = \lambda Y$, soit encore :

$$AY - \lambda Y = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I) Y = 0.$$

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = -1$:

$$\text{Ils vérifient : } \begin{pmatrix} 1/2 - (-1) & 0 & -3/2 \\ 0 & 2 - (-1) & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit le système : } \begin{cases} \frac{3}{2}x + 0 - \frac{3}{2}z = 0 \\ 3y = 0 \\ -\frac{3}{2}x + 0 + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}z \\ y = 0 \\ \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}}.$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est donc :

$$\{Y_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 2$:

$$\text{Ils vérifient : } \begin{pmatrix} 1/2 - 2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 2 - 2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{soit le système : } \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 0 - \frac{3}{2}z = 0 \\ 0 = 0 \\ -\frac{3}{2}x + 0 - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}z \\ z = -x \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = -x}.$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est donc :

$$\{Y_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0; 0\} \right\}.$$

4) Soit la matrice $M = kA$ où k est un réel non nul. Sans calcul, en déduire les valeurs propres et leurs vecteurs propres associés pour la matrice M , puis la forme du polynôme caractéristique de M .

Les valeurs propres λ' de M sont telles qu'il existe un vecteur Y' non nul, tel que : $MY' = \lambda'Y'$.

Or on sait que $AY_i = \lambda_i Y_i$, avec $\lambda_1 = \lambda_1 = -1$ ou $\lambda_2 = 2$, et $Y_i = Y_1$ ou Y_2 respectivement (cf q 3).

Ainsi : $MY_i = kAY_i = k\lambda_i Y_i \Rightarrow k\lambda_i$ est valeur propre de la matrice M associée au vecteur propre Y_i .

Ainsi, M admet :

$$\lambda'_1 = -k \text{ comme valeur propre et } \{Y'_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} \text{ comme vecteur propre,}$$

$\lambda'_2 = 2k$ comme valeur propre et $\{Y'_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathfrak{R}^2 - \{0; 0\} \right\}$ comme vecteur propre.

Grâce aux valeurs propres, on peut déduire la forme du polynôme caractéristique de la matrice M :

$$P_M(\lambda') = -(2k - \lambda')^2 \times (\lambda' + k) = -(\lambda' - 2k)^2 (\lambda' + k)$$