

L2

Année 2021-2022

Premier Semestre

Session initiale

UFR des Sciences Fondamentales et
Biomédicales

Faculté de Pharmacie de Paris

UE SA03M070

Physique des ondes

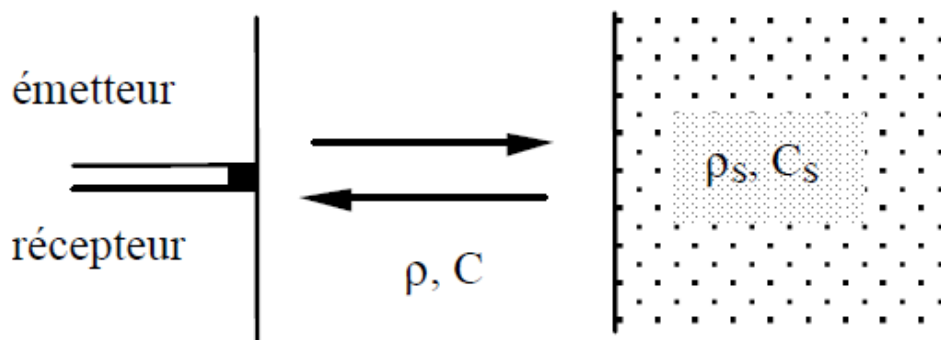
NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Document et/ou matériel autorisés : *Les calculettes sont autorisées*

Durée totale de l'épreuve : 1h

EXERCICE I (Effet Doppler)

On souhaite observer les mouvements d'un cœur fœtal. Pour cela on place côte à côte deux cristaux piézoélectriques dans un cylindre que l'on applique sur l'abdomen maternel. Le cristal source émet un signal de fréquence $\nu = 5 \text{ MHz}$. On considère que la distance moyenne séparant la surface de l'abdomen de la mère de la surface du cœur du fœtus est égale à 30 cm. On assimile les tissus séparant le cristal source de la surface du cœur à un milieu homogène de masse volumique ρ dans lequel la vitesse du son est $C = 1600 \text{ m.s}^{-1}$



- 1) Calculer le temps séparant l'émission d'un signal de la réception de l'écho renvoyé par la surface du cœur. On fait l'hypothèse que cette surface peut être considérée comme plane et perpendiculaire aux ondes émises par la source.

$$t = \frac{2.d}{C} = \frac{2 \times 0,3}{1600} = 3,75 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 375 \text{ } \mu\text{s}$$

- 2) Le cœur bat avec une fréquence de 100 battements par minute. La surface du cœur va donc soit se déplacer vers le cristal source, soit s'en éloigner périodiquement.

Donner les expressions des fréquences ν_1 et ν_2 des signaux reçus par le cristal après réflexion sur la surface du cœur. On admet que le module de la vitesse V_C du muscle cardiaque est constant (on fera un schéma représentant les différentes vitesses intervenant dans le calcul).

$$\text{Relation Doppler : } \nu' = \nu \cdot \frac{1 - \frac{\vec{V}_r \cdot \vec{C}}{C^2}}{1 - \frac{\vec{V}_s \cdot \vec{C}}{C^2}}$$

- 1) La surface du cœur se rapproche du cristal source

2 étapes dans le processus :

a) Le cristal émet une onde de fréquence ν perçue par le cœur à la fréquence ν_i

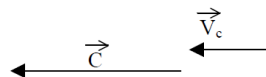


$$(\vec{v}_r \cdot \vec{C}) = \pi \Rightarrow \cos(\vec{v}_r \cdot \vec{C}) = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Source} = \text{cristal immobile} \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{0} \\ \text{Récepteur} = \text{cœur mobile} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{V}_c \end{array} \right\} \Rightarrow \nu_i = \nu \cdot \left(1 - \frac{\vec{v}_c \cdot \vec{C}}{C^2} \right)$$

$$\nu_i = \nu \cdot \left(1 - \frac{v_c \cdot \cos(\vec{v}_r \cdot \vec{C})}{C} \right) = \nu \cdot \left(1 + \frac{v_r}{C} \right)$$

b) Le signal de fréquence ν_i est réémis par le cœur et perçue par le cristal à la fréquence ν_1 .



$$(\vec{v}_r \cdot \vec{C}) = 0 \Rightarrow \cos(\vec{v}_r \cdot \vec{C}) = 1$$

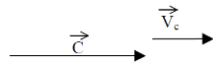
$$\left. \begin{array}{l} \text{Source} = \text{cœur mobile} \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{V}_c \\ \text{Récepteur} = \text{cristal immobile} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \nu_1 = \nu_i \cdot \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}_c \cdot \vec{C}}{C^2}} = \nu_i \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_c \cdot \cos(\vec{v}_c \cdot \vec{C})}{C}}$$

$$\nu_1 = \nu_i \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_c}{C}} \Rightarrow \nu_1 = \nu \cdot \frac{1 + \frac{v_c}{C}}{1 - \frac{v_c}{C}}$$

2) La surface du cœur s'éloigne du cristal source

2 étapes dans le processus :

a) Le cristal émet une onde de fréquence ν perçue par le cœur à la fréquence ν'_i

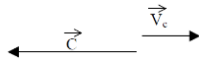


$$\left. \begin{array}{l} \text{Source} = \text{cristal immobile} \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{0} \\ \text{Récepteur} = \text{cœur mobile} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{V}_c \end{array} \right\} \Rightarrow (\vec{v}_r \cdot \vec{C}) = 0 \Rightarrow \cos(\vec{v}_r \cdot \vec{C}) = -1$$

$$\nu'_i = \nu \cdot \left(1 - \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{C}}{C^2} \right)$$

$$\nu'_i = \nu \cdot \left(1 - \frac{v_r \cdot \cos(\vec{v}_r \cdot \vec{C})}{C} \right) = \nu \cdot \left(1 - \frac{v_c}{C} \right)$$

- b) Le signal de fréquence ν'_i est réémis par le cœur et perçue par le cristal à la fréquence ν_2 .



$$\left. \begin{array}{l} \text{Source} = \text{cristal coeur mobile} \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{V}_c \\ \text{Récepteur} = \text{cristal immobile} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow (\vec{v}_r \cdot \vec{C}) = \pi \Rightarrow \cos(\vec{v}_s \cdot \vec{C}) = -1$$

$$\nu_2 = \nu'_i \cdot \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}_c \cdot \vec{C}}{C^2}} = \nu'_i \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_c \cdot \cos(\vec{v}_c \cdot \vec{C})}{C}}$$

$$\nu_2 = \nu'_i \cdot \frac{1}{1 + \frac{v_c}{C}} \Rightarrow \nu_2 = \nu \cdot \frac{1 - \frac{v_c}{C}}{1 + \frac{v_c}{C}}$$

- 3) Le générateur à l'origine des ondes émises par le cristal délivre des impulsions très brèves. Calculer $T_{\text{générateur}}$, le temps (périodicité) séparant deux impulsions pour que l'on reçoive en alternance ν_1 et ν_2 (c'est-à-dire qu'une première impulsion renverra un signal à la fréquence ν_1 et la suivante un signal à la fréquence ν_2) ?

$$T_{\text{générateur}} = \frac{T_c}{2} = \frac{1}{2 \cdot \nu_c} = 0,3 \text{ s}$$

- 4) Calculer la relation qui relie V_c la vitesse du cœur à C , ν la fréquence du signal émis par le cristal et la différence de fréquence $\Delta \nu = \nu_1 - \nu_2 = 220 \text{ Hz}$. On se placera dans l'approximation $V_c \ll C$

$$\Delta \nu = \nu_1 - \nu_2 = \nu \left[\frac{1 + \frac{V_c}{C}}{1 - \frac{V_c}{C}} - \frac{1 - \frac{V_c}{C}}{1 + \frac{V_c}{C}} \right] = \nu \left[\left(1 + \frac{V_c}{C}\right) \cdot \left(1 - \frac{V_c}{C}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{V_c}{C}\right) \cdot \left(1 + \frac{V_c}{C}\right)^{-1} \right]$$

$$V_c \ll C \Rightarrow \Delta \nu \approx \nu \left[\left(1 + \frac{V_c}{C}\right)^2 - \left(1 - \frac{V_c}{C}\right)^2 \right] \approx \nu \left[\left(1 + 2 \frac{V_c}{C}\right) - \left(1 - 2 \frac{V_c}{C}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \Delta \nu \approx \nu \cdot 4 \cdot \frac{V_c}{C} \Rightarrow V_c = \frac{\Delta \nu}{\nu} \cdot \frac{C}{4}$$

$$V_c = \frac{220}{5 \cdot 10^6} \cdot \frac{1600}{4} = 1,76 \text{ cm.s}^{-1}$$

EXERCICE II

Combinaison d'ondes

1) On considère la superposition de trois ondes progressives vers les x croissants dans le même référentiel (x,t). Ces trois ondes sont de même période et ont leurs amplitudes dans un rapport 1, 1/2 et 1/3 et leur phase à l'origine 0, $\pi/2$, et π respectivement. Calculer le module au carré de l'onde résultant de la superposition de ces trois ondes.

$$\xi_1(x,t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \xi_2(x,t) = \frac{\xi_0}{2} e^{i\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \xi_3(x,t) = \frac{\xi_0}{3} e^{i(\omega t - kx + \pi)}$$

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) + \xi_3(x,t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(1 + \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} e^{i\pi} \right) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\frac{2}{3} + \frac{i}{2} \right)$$

$$|\xi(x,t)|^2 = \left(\xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\frac{2}{3} + \frac{i}{2} \right) \right) \left(\xi_0 e^{-i(\omega t - kx)} \left(\frac{2}{3} - \frac{i}{2} \right) \right) = \xi_0^2 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{4} \right) = \frac{25}{36} \xi_0^2 \Rightarrow |\xi| = \frac{5}{6} \xi_0$$

2) En déduire l'amplitude et la phase de l'onde résultante.

(on rappelle la relation $\tan(\theta) = \frac{\text{Im}(e^{i\theta})}{\text{Re}(e^{i\theta})}$).

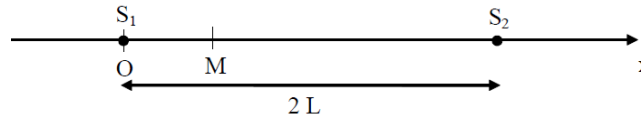
$$|\xi(x,t)|^2 = \frac{25}{36} \xi_0^2 \Rightarrow \xi_0 = \frac{5}{6} \xi_0$$

$$\frac{\text{Im}(\xi(x,t))}{\text{Re}(\xi(x,t))} = \tan(\phi) \Rightarrow \tan(\phi) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \phi = 0,643 \text{ rad} \approx 37^\circ$$

EXERCICE III

Deux sources acoustiques synchrones (c.a.d. ayant la même phase à l'origine) S_1 et S_2 distantes de $2.L$ émettent l'une vers l'autre une onde acoustique de fréquence ν (et de pulsation ω) se propageant dans l'air à la vitesse c . On désigne par $P_1(t) = P_2(t) = P_0 \cdot e^{i\omega t}$ l'expression de la surpression produite par chacune des deux sources.

Soit M un point de la droite reliant les deux sources S_1 et S_2 . On repère sa position par $S_1M = x$ sur cette droite.



- 1) Exprimer $P_1(M, t)$ et $P_2(M, t)$ les expressions de la surpression produite au point M par les sources S_1 et S_2 respectivement.

$$P_1(M, t) = P_0 e^{i(\omega t - k \cdot \overline{S_1 M})} = P_0 e^{i(\omega t - k \cdot x)}$$

$$P_2(M, t) = P_0 e^{i(\omega t + k \cdot \overline{S_2 M})}$$

$$\overline{S_2 M} = \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 M} = -2L + x \Rightarrow P_2(M, t) = P_0 e^{i(\omega t + k \cdot (x - 2L))}$$

- 2) Calculer $P_T(M, t)$ l'expression de la surpression totale au point M, puis en déduire $P_T(x, t)$ en notation exponentielle.

$$P_T(M, t) = P_1(M, t) + P_2(M, t) = P_0 e^{i(\omega t - k \cdot x)} + P_0 e^{i(\omega t + k \cdot (x - 2L))}$$

$$P_T(M, t) = P_0 e^{i\omega t} \left(e^{-ikx} + e^{ik(x - 2L)} \right)$$

- 3) Quelle est la nature de l'onde entre les deux sources (justifier votre réponse)

C'est une onde stationnaire car la somme de deux ondes de fréquences identiques et se propageant dans des directions opposées.

- 4) Démontrer à partir des résultats de la question 2 votre réponse à la question 3.

$$P_T(M, t) = P_0 e^{i\omega t} \left(e^{-ikx} + e^{ik(x - 2L)} \right)$$

On met en facteur l'exponentielle ayant pour argument la demi-différence de chacun des termes.

$$P_T(M, t) = P_0 e^{i\omega t} e^{-ik \cdot L} \left(e^{-ik(x - L)} + e^{ik(x - L)} \right) = P_0 e^{i(\omega t - k \cdot L)} \cos(k(x - L))$$

$$P_T(M, t) = P_0 \cos(k(x - L)) e^{i(\omega t + \varphi)} \text{ avec } \varphi = -k \cdot L$$

- 5) Calculer la relation entre k et L pour que $P_T(x = 2L, t)$, la pression totale sur la source S_2 , soit nulle quel que soit t ($\forall t$)

$$P_T(S_2, t) = P_0 \cos(k \cdot (2L - L)) e^{i(\omega t + \varphi)} = P_0 \cos(k \cdot L) e^{i(\omega t + \varphi)} = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \cos(k \cdot L) = 0 \Leftrightarrow k \cdot L = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

6) En déduire l'ensemble des longueurs d'onde λ_n qui satisfont à cette condition.

$$k \cdot L = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot L = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \Rightarrow \lambda_n \left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \right) = 2 \cdot \pi \cdot L$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{2}{\frac{1}{2} + n} \cdot L = \frac{4}{1 + 2 \cdot n} \cdot L$$

7) En déduire le nombre de nœuds pour λ_5 .

$$\text{Distance entre nœuds} = \frac{\lambda_n}{2}$$

$$S_2 \text{ est un nœud} \Rightarrow \text{positions des nœuds} = 2L - \frac{\lambda_n}{2} > 0$$

$$x_m = \text{positions des nœuds } m = 2L - m \cdot \frac{\lambda_n}{2} \geq 0$$

$$x_m = \text{positions des nœuds } m = 2L - m \cdot \frac{4}{1 + 2 \cdot n} \cdot L = \left(2 - m \cdot \frac{2}{1 + 2 \cdot n} \right) \cdot L$$

$$x_m = \left(\frac{(2 + 4 \cdot n) - m \cdot 2}{1 + 2 \cdot n} \right) \cdot L = \left(\frac{(2 + 20) - m \cdot 2}{1 + 10} \right) \cdot L = \left(2 - \frac{2 \cdot m}{11} \right) \cdot L$$

$$x_m \Rightarrow 2 - \frac{2 \cdot m}{11} \geq 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot m}{11} \leq 2 \Rightarrow m \leq \frac{22}{2} = 11 \Rightarrow 11 \text{ nœuds}$$