
UE SA03U050

**Mathématiques appliquées aux sciences 3
Corrigé de l'épreuve du jeudi 16 décembre 2021**

NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Document et/ou matériel autorisés : AUCUN

Durée totale de l'épreuve : 1h30

- Le sujet comporte 12 pages (page de garde et de complément de réponse incluses).
- La réponse à chaque question devra être rédigée sur ce cahier-réponses, dans le cadre prévu à cet effet. Si nécessaire, la copie de couverture pourra être utilisée comme complément de réponse, à condition de bien préciser le numéro de l'exercice et de la question et d'indiquer le report au niveau de la case correspondante.
- **On prendra soin de faire apparaître les étapes intermédiaires principales des calculs dans les réponses données.**
- **Les calculatrices sont interdites.**

Exercice 1

On considère le système (S) :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x + y + z - t = -2 \\ x - 2y + z - t = 1 \\ -x + y - 2z + t = -1 \end{cases}$$

1) Résoudre ce système à l'aide de la méthode de Gauss. Toutes les opérations effectuées à chacune des étapes de la résolution devront être précisées (la notation en tiendra compte).

On résout (S) en conservant la 1ère ligne pour ligne pivot.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x + y + z - t = -2 \\ x - 2y + z - t = 1 \\ -x + y - 2z + t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 0 - y - z - 3t = -6 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 - 3y + 0 - 2t = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 0 + 2y - z + 2t = 1 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ -y - z - 3t = -6 \\ 0 + 3z + 7t = 17 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ 0 - 3z - 4t = -11 & L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ -y - z - 3t = -6 \\ 3z + 7t = 17 \\ 0 + 3t = 6 & L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ 3z + 14 = 17 \\ -y - z - 6 = -6 \\ x + y + z + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ z = 1 \\ -y - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ z = 1 \\ y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ t = 2 \end{cases}} \end{aligned}$$

Ce système admet donc une solution unique : $S = \{(0; -1; 1; 2)\}$.

2) Retrouver votre résultat uniquement pour l'inconnue y à l'aide des formules de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires (on ne cherchera surtout pas à inverser la matrice associée à ce système linéaire). On précisera toutes les opérations successives effectuées pour les calculs de déterminants.

* Commençons par calculer le déterminant du système (S) :

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_4 \leftarrow C_4 - C_1} \\ &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 = (-1)^{1+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 6 = -9 \neq 0.$$

Le déterminant du système (S) étant non nul, (S) admet une solution unique.

* Déterminons à présent y :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(S)} = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \end{array}$$

$$y = -\frac{1}{9} \times (-1)^{3+3} \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \times (-1)^{2+1} \times 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \times (2+1) = -1.$$

On retrouve bien le résultat obtenu à la question 1 pour l'inconnue y.

Remarque (non demandé) :

Pour l'inconnue x, on aurait :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(S)} = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \end{array} = 0,$$

par propriété du déterminant car la ligne 2 est égale à - 2 x la ligne 3 : $L_2 = - 2 L_3$.

Exercice 2

Soit la matrice A telle que : $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle inversible ? Justifier la réponse. En déduire une valeur propre évidente de la matrice A .

Pour savoir si une matrice est inversible, on calcule son déterminant :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 = 0.$$

Remarque : on aurait pu directement conclure que $\det A = 0$, du fait que la 1ère et la 3ème ligne de ce déterminant sont égales.

Le déterminant de la matrice A étant nul, la matrice A n'est pas inversible.

On en déduit également que la matrice A admet 0 pour valeur propre, comme cela a été vu en cours.

2) Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ associé à la matrice A . En déduire que les valeurs propres de la matrice A sont 0, 6 et -6.

* Déterminons tout d'abord : $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 & -1 \\ -4 & 2-\lambda & -4 \\ -1 & -4 & -1-\lambda \end{pmatrix}$.

* Le polynôme caractéristique de la matrice A est le déterminant de $A - \lambda I$, soit :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & -1 \\ -4 & 2-\lambda & -4 \\ -1 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & -1 \\ -4 & 2-\lambda & -4 \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1,$$

soit en factorisant λ sur la dernière ligne, puis en remplaçant C_1 par $C_1 + C_3$:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & -1 \\ -4 & 2-\lambda & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 & -1 \\ -8 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à développer le déterminant par rapport à la dernière ligne :

$$P_A(\lambda) = \lambda \times (-1)^{3+3} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \times ((-2-\lambda)(2-\lambda) - 32) = -\lambda \times (\lambda^2 - 4 - 32)$$

Ce polynôme se factorise en : $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 36) = -\lambda \times (\lambda - 6)(\lambda + 6)$.

La matrice A admet donc 3 valeurs propres simples qui sont les 3 racines de son polynôme caractéristique, soit : $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 6$; $\lambda_2 = -6$.

N.B. : on retrouve bien que 0 est valeur propre de la matrice A .

3) Déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres de A .

Les vecteurs propres $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ associés à la valeur propre λ vérifient : $AY = \lambda Y$,

soit encore : $AY - \lambda Y = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I) Y = 0$.

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_0 = 0$:

Ils vérifient : $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit le système : $\begin{cases} -x - 4y - z = 0 \\ -4x + 2y - 4z = 0 \\ -x - 4y - z = 0 \end{cases}$.

La 3ème équation étant la même que la 1ère, on peut la supprimer et diviser la 2nde par 2 :

On a : $\begin{cases} -x - 4y - z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = -4y \\ y + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$.

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_0 = 0$ est donc :

$$\{Y_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 6$:

Ils vérifient : $\begin{pmatrix} -1-6 & -4 & -1 \\ -4 & 2-6 & -4 \\ -1 & -4 & -1-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit le système : $\begin{cases} -7x - 4y - z = 0 \\ -4x - 4y - 4z = 0 \\ -x - 4y - 7z = 0 \end{cases}$.

On peut diviser la 2nde équation par (-4) : $\begin{cases} -7x - 4y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x - 4y - 7z = 0 \end{cases}$

d'où, en remplaçant la 3^è équation par la somme de la 2^è et de la 3^è équation :
$$\begin{cases} -7x - 4y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -3y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x - 4y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 3y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y = -2z \end{cases}, \text{ en remplaçant la 1^{ère} équation par la somme de la 2^è et de la 1^{ère} équation.}$$

$$\text{Enfin : } \begin{cases} -2x = y \\ x + y + z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = y \\ x - 2x + z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = y \\ z = x \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}}.$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 6$ est donc :

$$\{Y_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = -6$:

$$\text{Ils vérifient : } \begin{pmatrix} -1+6 & -4 & -1 \\ -4 & 2+6 & -4 \\ -1 & -4 & -1+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit le système : } \begin{cases} 5x - 4y - z = 0 \\ -4x + 8y - 4z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{On peut diviser la 2^{de} équation par (-4) : } \begin{cases} 5x - 4y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

d'où, en remplaçant la 3^è équation par la somme de la 2^è et de la 3^è équation :
$$\begin{cases} 5x - 4y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -6y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 6y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y = z \end{cases}, \text{ en remplaçant la 1^{ère} équation par la somme de la 2^è et de la 1^{ère} équation.}$$

$$\text{Enfin : } \begin{cases} x = y \\ x - 2x + z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ -x + z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = y = z}.$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = -6$ est donc :

$$\{Y_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

4) On considère la matrice : $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice ? Justifier brièvement.

* On remarque que $M = (1/6) A$.

Les valeurs propres λ de M sont telles qu'il existe un vecteur colonne Y non nul, tel que : $MY = \lambda Y$.

Or on sait que $AY_i = \lambda_i Y_i$, avec λ_i valeur propre de A ($\lambda_i = 0 ; 6$ ou -6) et Y_i vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i .

Ainsi : $MY_i = (1/6) AY_i = (1/6) \lambda_i Y_i$.

$\Rightarrow (1/6) \lambda_i$ est valeur propre de la matrice M associée au vecteur propre Y_i .

Les valeurs propres de M sont donc 0 ; 1 et -1.

* L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_0 = 0$ est donc :

$$\{Y_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

* L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est donc :

$$\{Y_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

* L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = -1$ est donc :

$$\{Y_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Exercice 3

Déterminer l'inverse de la matrice A à l'aide de la méthode de Cramer pour l'inversion des matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On détaillera les calculs effectués

On a : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com}A)^T$.

* Calculons le déterminant de A : $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

La matrice A admet donc bien une matrice inverse A^{-1} .

* Déterminons la comatrice de A :

$$\text{Com}A = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Finalement : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com}A)^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

* Vérification :

$$A^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$