

Combinaison d'ondes

Calculer $\xi_t(x, t)$, onde résultante de la superposition des trois ondes suivantes par les deux méthodes, algébriques et de Fresnel (les marques sur le cercle correspondent à des pas de 10°).

1)

$$\xi_1(x, t) = \sqrt{3} \cdot \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \xi_2(x, t) = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{5\pi}{6}\right)}, \quad \xi_3(x, t) = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{7\pi}{6}\right)}$$

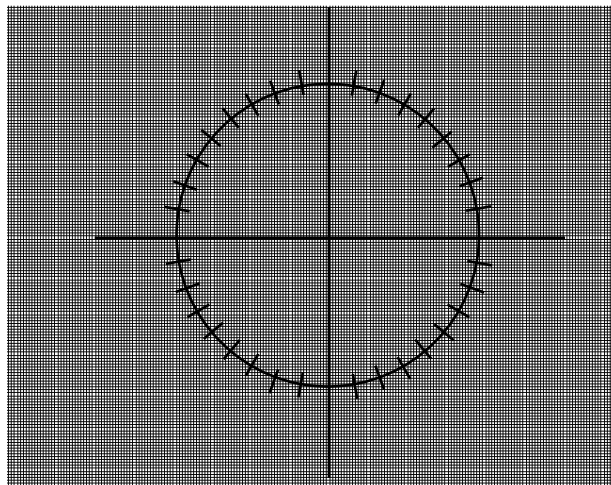
2)

$$\xi_1(x, t) = \sqrt{3} \cdot \xi_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad \xi_2(x, t) = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{5\pi}{6}\right)}, \quad \xi_3(x, t) = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{7\pi}{6}\right)}$$

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) + \xi_3(x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\sqrt{3} + e^{i\frac{5\pi}{6}} + e^{i\frac{7\pi}{6}} \right)$$

$$= \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\left(\sqrt{3} + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right) + i \left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right) \right)$$

$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{i(\omega t - kx)} \left(\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) = 0$$



3) En déduire l'expression de $\xi_w(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_3(x, t)$

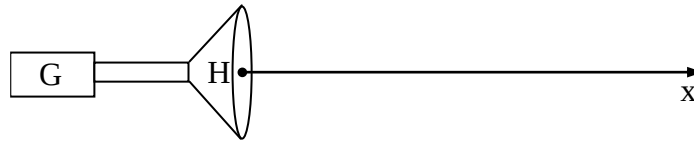
$$\begin{aligned}\xi_w(x, t) &= \xi_1(x, t) + \xi_3(x, t) = \xi_t(x, t) - \xi_2(x, t) \\ &= 0 - \xi_2(x, t) = -\xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{5\pi}{6}\right)} = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{5\pi}{6} + \pi\right)} = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx + \frac{11\pi}{6}\right)} = \xi_0 e^{i\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{6}\right)}\end{aligned}$$

II) Problème

Les deux parties du problème sont indépendantes

Partie I

Un haut-parleur H situé à l'origine d'un axe Hx (figure) émet un signal de pulsation ω et d'amplitude P_0 . Le sens des x croissants est choisi selon la direction de propagation de l'onde.



figure

On appelle φ la phase à l'origine.

1) Exprimer, en notation complexe $\tilde{P}_H(t)$, l'équation horaire décrivant la surpression au niveau de la membrane H au cours du temps, puis $P_H(t)$ cette même équation horaire en notation réelle.

$$\begin{aligned}\tilde{P}_H(t) &= \tilde{P}(0, t) = P_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} \\ P_H(t) &= P_0 \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

2) On choisit l'origine temporelle telle que la valeur de la surpression soit nulle l'instant $t=0$ et qu'elle soit positive pour les temps t tel que $0 < t < \frac{T}{2}$, T = période temporelle du signal. En déduire la valeur de φ et réécrire les deux équations précédentes (on justifiera les réponses).

$$\left. \begin{array}{l} P_H(t=0) = 0 \Rightarrow P_0 \cdot \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ P_H\left(0 < t < \frac{T}{2}\right) > 0 \Rightarrow P_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + k\pi\right) > 0 \Rightarrow k \text{ impaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} P_H(0) = P_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ \tilde{P}_H(t) = P_0 \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \end{cases}$$

3) L'onde sonore progressive se propage alors le long de l'axe Ox dans le sens des x croissants (la membrane est positionnée à $x=0$ et on conserve la même origine temporelle). Exprimer l'équation de cette onde en notation complexe et en notation réelle. Préciser la dimension de l'amplitude de l'onde.

$$\begin{aligned} \tilde{P}_H(x, t) &= P_0 \cdot e^{i\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)} \\ P_H(x, t) &= P_0 \cdot \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right) \\ P_0 &\text{à la dimension d'une pression} \end{aligned}$$

4) La fréquence du générateur est $\nu = 990$ Hz. On rappelle que la vitesse du son dans l'air est $c=330$ m/s. Exprimer en notation réelle, l'équation horaire de la surpression aux points M_1 d'abscisse $x = 1$ m et M_2 d'abscisse $x = 3,5$ m. Calculer le déphasage de la surpression entre ces points et l'origine. Que peut-on dire de l'état vibratoire de ces points par rapport à l'origine? (Conseil : conserver π dans les expressions des différentes grandeurs de la phase)

$$P(x, t) = P_0 \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\omega = 2\pi \nu = 2\pi \cdot 990 \text{ rad.s}^{-1} = 1980\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 990}{330} = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$$

$$\text{à l'origine, } x = 0 \Rightarrow P_H(0, t) = P_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

au point M_1 , $x = 1$

$$P(1, t) = P_0 \cos\left(\omega t - k \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = P_0 \cos\left(1980\pi \cdot t - 6\pi - \frac{\pi}{2}\right) = P_0 \cos\left(1980\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{le déphasage par rapport à l'origine est } \Delta\varphi_1 = -\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow M_1$ oscille en phase avec l'origine

au point M , $x = 3,5$

$$P(3,5, t) = P_0 \cos\left(\omega t - k \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = P_0 \cos\left(1980\pi \cdot t - 21\pi - \frac{\pi}{2}\right) = P_0 \cos\left(1980\pi \cdot t - \frac{3\pi}{2}\right) = P_0 \cos\left(1980\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{le déphasage par rapport à l'origine est } \Delta\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$\Rightarrow M_2$ oscille en opposition de phase avec l'origine

Partie II

On modifie la fréquence du haut-parleur. L'onde acoustique se propage toujours selon la même direction des x croissants. On positionne sur cet axe deux transducteurs piézo-électrique séparés d'une distance d (figure 2). Chaque transducteur génère un signal proportionnel à la valeur de l'intensité qu'il mesure localement.

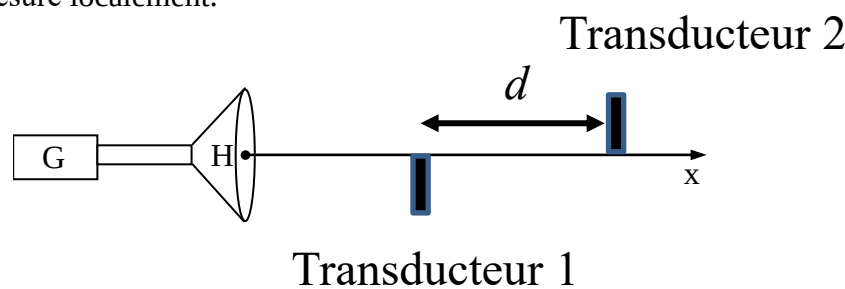


Figure 2

On rappelle la relation entre l'intensité d'une onde sonore I et P_0 , l'amplitude de la surpression :

$$I = \frac{P_0^2}{2Z}, \quad Z \text{ étant l'impédance du milieu. Chacun de ces signaux sont visualisés en temps réel par}$$

un oscilloscope comme le montre la figure 3. On donne les caractéristiques suivantes pour l'air :

$$\text{densité} = \rho_a = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}; \quad \text{vitesse du son} = c_a = 340 \text{ m.s}^{-1}$$

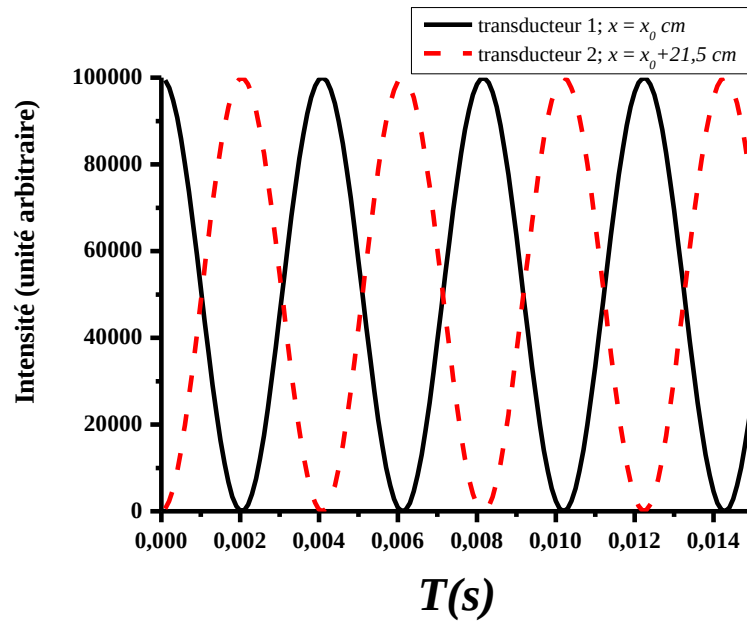


Figure 3

En déduire

- L'amplitude maximale de la surpression
- La fréquence de l'onde émise
- La longueur d'onde
- Le déphasage de l'onde de surpression entre les deux transducteurs
- La valeur minimale de la distance d pour que les deux transducteurs mesurent une intensité en phase

a) Amplitude de la surpression :

$$\left. \begin{array}{l} I_{\max} = 100000 = 10^5 \\ Z = 1,2 \times 340 \approx 400 \text{ SI} \\ I = \frac{p_0^2}{2Z} \end{array} \right\} \Rightarrow p_0 = \sqrt{2 \cdot Z \cdot I} = \sqrt{80 \cdot 10^6} \approx 9 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 9000 \text{ Pa}$$

b) Fréquence :

1 période temporelle en pression = 2 périodes temporelles en intensité $\approx 0,0085 \text{ s}$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{85 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^4}{85} = 118 \text{ Hz}$$

c) longueur d'onde : $\lambda = c \cdot T = 340 \cdot 85 \cdot 10^{-4} = 2,89 \approx 3 \text{ m}$

d) déphasage :

Intensité en opposition de phase $\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ pour l'onde de pression

e) distance minimale :

Pour que l'intensité mesurée sur chaque transducteur soit en phase, il faut que la surpression mesurées soient en phase ou en opposition de phase (à cause du carré). Le plus petit déphasage

correspond à la première opposition de phase $\Rightarrow \Delta\varphi = \pi$ et $\Delta\varphi = k.d = \frac{2\pi}{\lambda}d$

$$\frac{2\pi}{\lambda}d = \pi \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2} = 1,4 \text{ m}$$