
U.E. SA03U050

Mathématiques Appliquées aux Sciences 3
Corrigé de l'épreuve

NB : Tout signe distinctif porté sur la copie pouvant indiquer sa provenance constitue une fraude.

Durée totale de l'épreuve : 1h30

- Le sujet comporte 12 pages (page de garde et de complément de réponse incluses).
- La réponse à chaque question devra être rédigée sur ce cahier-réponses, dans le cadre prévu à cet effet. Si nécessaire, la copie de couverture pourra être utilisée comme complément de réponse, à condition de bien préciser le numéro de l'exercice et de la question et d'indiquer le report au niveau de la case correspondante.
- **On prendra soin de faire apparaître les étapes intermédiaires principales des calculs dans les réponses données.**
- **Les calculatrices sont interdites.**

Exercice 1

On considère le système (S) :
$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$$

1) Résoudre ce système à l'aide de la méthode de Gauss. *Chaque opération sera explicitée.*

On résout (S) en conservant la 1ère ligne pour ligne pivot.

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 0 + 5y + 7z = 8 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 + 5y + z = 14 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 5y + 7z = 8 \\ 0 - 6z = 6 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ 5y - 7 = 8 \\ x - 2y + 3 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = 3 \\ x - 6 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}}$$

Le système (S) admet donc une solution unique : $S = \{(2; 3; -1)\}$.

2) Résoudre à présent ce système à l'aide des formules de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires. *On précisera toutes les opérations successives effectuées pour le calcul de chacun des déterminants.*

* Commençons par calculer le déterminant du système (S) :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

Le déterminant du système (S) étant non nul, (S) admet une solution unique.

* Déterminons à présent x :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 13 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\det(S)} = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 13 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 17 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 25 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 17 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 25 & 5 & -2 \end{vmatrix},$$
$$C_1 \leftarrow C_1 - 6C_3 \qquad C_2 \leftarrow C_2 - C_3$$

$$\text{soit : } x = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 17 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 25 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \times (-1)^{2+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 17 & 1 \\ 25 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{30} \times 5 \times \begin{vmatrix} 17 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times (17-5) = 2.$$

* Déterminons à présent y :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 13 & -2 \end{vmatrix}}{\det(S)} = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 13 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 14 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 14 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \longleftarrow C_2 + C_1 \quad C_3 \longleftarrow C_3 + 3C_1$$

$$y = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 14 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \times (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \times 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{15} \times (4-49) = 3.$$

* Déterminons à présent z :

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 13 \end{vmatrix}}{\det(S)} = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 5 & 14 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \longleftarrow C_2 + 2C_1 \quad C_3 \longleftarrow C_3 + C_1$$

$$z = -\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 5 & 14 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \times (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \times 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} \times (14-8) = -1.$$

On retrouve bien les résultats obtenus à la question 1.

Exercice 2

On cherche les matrices X telles que $X = AX + B$, où A et B sont des matrices de tailles adéquates.

1) Si X est une matrice de dimension $n \times m$, quelles doivent être les dimensions des matrices A et B ?

En raison de l'égalité et de l'homogénéité des termes :

* B doit être de dimension semblable à X , soit $n \times m$.

* AX doit être de dimension semblable à X , soit $n \times m$. Il faut donc que A soit une matrice carrée de dimension $n \times n$.

2) Montrer que si B est une matrice non nulle, cette équation n'admet de solution que si la matrice $I - A$ est inversible et que dans ce cas, la matrice X est donnée par : $X = (I - A)^{-1} B$, où I est la matrice identité de dimension $n \times n$.

$$X = AX + B \Leftrightarrow X - AX = B \Leftrightarrow IX - AX = B \Leftrightarrow (I - A)X = B.$$

Si la matrice $I - A$ est inversible, alors en multipliant l'égalité à gauche par son inverse, $(I - A)^{-1}$:

$$(I - A)^{-1} (I - A)X = (I - A)^{-1} B, \text{ d'où : } \boxed{X = (I - A)^{-1} B}.$$

3) Soit la matrice A telle que : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer, si elle existe, la matrice inverse de

la matrice $C = I - A$, où I est la matrice identité de dimension 3×3 .

* Déterminons $C = I - A$:

$$C = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Cette matrice est triangulaire supérieure, son déterminant est donc égal au produit de ses termes diagonaux, soit : $\det(C) = \det(I - A) = 1 \neq 0$.

* Pour déterminer son inverse, on peut soit utiliser la méthode de Cramer pour inverser les matrices,

soit résoudre le système linéaire associé à l'équation : $CY = D$, avec $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

La matrice C étant une matrice triangulaire, cette dernière méthode sera plus rapide.

$$CY = D \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ y = b - c \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b + c \\ y = b - c \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Or $CY = D \Leftrightarrow Y = C^{-1}D$.

$$\text{On en déduit : } \boxed{C^{-1} = (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

N.B. On vérifie bien que : $C^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

4) Déterminer X si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

$$X = C^{-1}B = (I - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit la matrice A telle que : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1) Déterminer les valeurs propres de la matrice A . On précisera leur multiplicité.

* Déterminons tout d'abord : $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$

* En effet, les valeurs propres de la matrice A sont les racines de son polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.

* Le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ de la matrice A est le déterminant de $A - \lambda I$, soit :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad , \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

soit en factorisant $(1-\lambda)$ sur la dernière ligne, puis en remplaçant C_2 par $C_2 - C_3$:

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \times (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à développer le déterminant par rapport à la dernière ligne :

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda) \times \left((1-\lambda)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) = (1-\lambda) \times (1-\lambda - \frac{1}{2})(1-\lambda + \frac{1}{2}) = (1-\lambda) \times (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{3}{2} - \lambda)$$

D'où le polynôme caractéristique : $P_A(\lambda) = (1-\lambda) \times (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{3}{2} - \lambda)$.

La matrice A admet donc 3 valeurs propres simples qui sont les 3 racines de son polynôme caractéristique, soit : $\lambda_0 = 1/2$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3/2$.

2) Déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres de A .

Les vecteurs propres $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ associés à la valeur propre λ vérifient : $AY = \lambda Y$,

soit encore : $AY - \lambda Y = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I) Y = 0$.

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_0 = 1/2$:

Ils vérifient : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit le système : $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ y = -x \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}x = 0 \\ y = -x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases}}$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_0 = 1/2$ est donc :

$$\{Y_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$:

$$\text{Ils vérifient : } \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit le système : } \begin{cases} y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x = 0 \\ -\frac{1}{2}x = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Celui-ci se réduit à 2 équations : } \begin{cases} z = -2y \\ x = 0 \end{cases}.$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est donc :

$$\{Y_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

* Vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 3/2$:

$$\text{Ils vérifient : } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit le système : } \begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Soit en multipliant toutes les équations par 2 : } \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ y = x \\ z = -x \end{cases}.$$

$$\text{Ce système se réduit à 2 équations (la 1ère n'apportant que } 0 = 0 \text{) : } \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases}.$$

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 3/2$ est donc :

$$\{Y_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$