

Systèmes de coordonnées

1 Système de coordonnées

Exercice 1. Identités remarquables.

Considérons le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ ainsi que la base

$$\mathcal{B} = ((X+1)^2, (X-1)^2, (X+1)(X-1)).$$

1) Calculez les polynômes suivants :

1.1) $(1, 1, 2)_{\mathcal{B}}$,

1.2) $(1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$,

1.3) $(1, 1, -2)_{\mathcal{B}}$.

2) Déduisez-en les coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ des polynômes X^2 , X et 1 .

3) Déduisez-en le système de coordonnées $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ puis vérifiez vos résultats avec la première question.

Exercice 2. Base presque canonique.

Considérons la base $\mathcal{B} = ((0, 1), (1, 0))$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

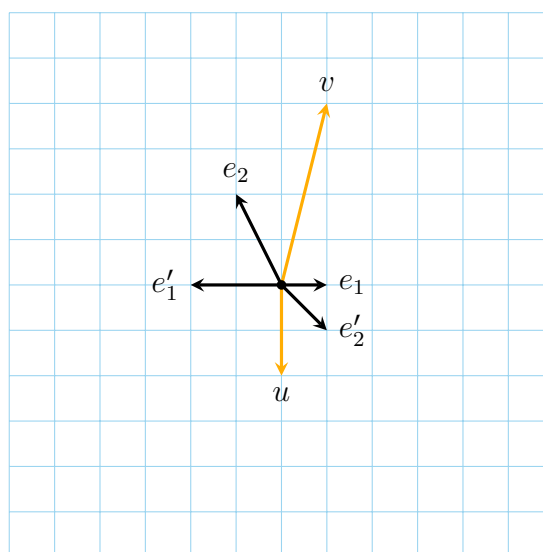
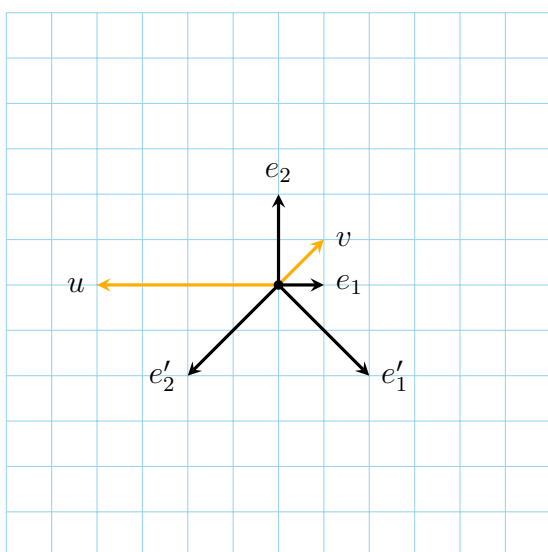
1) Explicitez le système de coordonnées associé à la base $\mathcal{B}$.

2) Quel vecteur de $\mathbb{R}^2$ a pour coordonnées $(2, 3)$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$?

3) Quelles sont les coordonnées du vecteur $(3, 7)$ dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 3. Coordonnées graphiques.

Dans chacun des cas suivants, déterminez les coordonnées des vecteurs u et v dans les bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ de $\mathbb{R}^2$, puis dessinez les vecteurs $w = (-2, 1)_{\mathcal{B}}$ et $w' = (-2, 1)_{\mathcal{B}'}$.



Exercice 4. Systèmes de coordonnées.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E . Explicitez le système de coordonnées $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ pour chacun des cas suivants.

- 1) $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$.
- 2) $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 1))$.
- 3) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
- 4) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$.
- 5) $E = \mathbb{C}$ et $\mathcal{B} = (1, i)$.
- 6) $E = \mathbb{C}$ et $\mathcal{B} = (1 + i, 1 - i)$.

2 Représentation matricielle d'une application linéaire

Exercice 5.

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f : (a, b, c) \mapsto (a + b, -c)$. On considère également les familles $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ définies par $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3) = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2) = ((1, 1), (0, 1))$.

- 1) Déterminez les images e'_1 , e'_2 et e'_3 des vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ par l'application f .
- 2) Déterminez les coordonnées des vecteurs e'_1 , e'_2 et e'_3 dans la base $\mathcal{B}_2$.
- 3) Déterminez la matrice $[f]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ de l'application f relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
- 4) Vérifiez votre résultat précédent en calculant $f(-1, 0, 1)$ directement avec l'application f puis à l'aide de la matrice $[f]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

Exercice 6. Matrices de l'identité.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit f l'application identité de $\mathbb{R}^2$. Pour chacun des cas suivants, explicitez la matrice M de l'application f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

- 1) $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 1))$.
- 2) $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 0))$.
- 3) $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = ((1, -1), (0, 1))$.
- 4) $\mathcal{B} = ((-1, 2), (1, 0))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1), (0, -2))$.

Exercice 7. Matrice d'application linéaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F . Soit f une application linéaire de E dans F . Pour chacun des cas suivants, explicitez la matrice M de l'application f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

- 1) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont les bases canoniques respectives de E et F et

$$f(x, y) = (2y, x + y, y - x).$$

- 2) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_E = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$, $\mathcal{B}_F = ((0, 1), (1, 0))$ et

$$f(x, y, z) = (x + y, x + z).$$

- 3) $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont les bases canoniques respectives de E et F et

$$f(P) = 2P' - P.$$

4) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont les bases canoniques respectives de E et F et

$$f(P) = (P(0), P(-1)).$$

Exercice 8. Matrice d'endomorphisme.

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à une matrice M associe sa transposée M^T . Déterminez la matrice M de f relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3 Utilité des matrices d'applications linéaires

Exercice 9. Image et noyau.

Considérons l'application $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ P &\longmapsto P(1+i). \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{P} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{C} = (1, i)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{C}$.

- 1) Déterminez la matrice de f de la base $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{C}$.
- 2) Calculez l'image et le noyau de f en utilisant la représentation matricielle.

Exercice 10. Changement de bases, image et noyau.

Considérons l'application $\mathbb{R}$ -linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{C}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (y - 2z + i(x - 3y + 3z), -x + 6y - 9z + i(x - 5y + 7z))$$

Notons $\mathcal{R}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = ((1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i))$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$ vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Considérons également les bases

$$\mathcal{R}' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}' = ((0, -1), (1, 2 - i), (1, 2), (i, 2i - 1))$$

de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{C}^2$ respectivement.

- 1) Déterminez la matrice de f de la base $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{C}$.
- 2) Donnez la matrice de passage de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$ et calculez son inverse.
- 3) Donnez la matrice de passage de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$ et calculez son inverse.
- 4) En utilisant les matrices de passage, déterminez les coordonnées du vecteur $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{R}'$ puis les coordonnées de $(4 - 2i, 7 + 3i)$ dans la base $\mathcal{C}'$. Vérifiez ensuite vos calculs.
- 5) En utilisant la formule de changement de bases, calculez la matrice de l'application f de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{C}'$.
- 6) Déterminez le noyau et l'image de f en utilisant la matrice $[f]_{\mathcal{R}}^{\mathcal{C}}$. Faites de même avec la matrice $[f]_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{C}'}$. Expliquez pourquoi les résultats sont identiques.

4 Changement de base

Exercice 11.

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases d'un même $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- 1) Explicitez $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ en fonction de $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.
- 2) Explicitez $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$ en fonction de $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.

Exercice 12. Matrice de passage.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E . Dans chacun des cas suivants, déterminez les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

- 1) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((-1, 2), (1, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 2), (0, -1))$.
- 2) $E = \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = (1, i)$ et $\mathcal{B}' = (1 + i, 1 - i)$.
- 3) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((-1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, -1, 0))$.

Exercice 13. Changement de base et polynômes.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, associé à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2) = (1, X, X^2)$. Soient P_0 , P_1 et P_2 trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par

$$P_0 = X + 1, \quad P_1 = X^2 + X, \quad P_2 = X^2.$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = P + XP'$.

- 1) Vérifiez que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 2) Déterminez les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
- 3) Déterminez la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ associée à f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
- 4) Déterminez la matrice $[f]_{\mathcal{B}'}$ associée à f par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 14. Endomorphismes de matrices.

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ainsi que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soient f et g des applications de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par $f(M) = AM$ et $g(M) = MA$.

- 1) Montrez que f et g sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2) Déterminez les matrices associées à f , g et $f - g$ relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 3) Déterminez une base et la dimension de l'image de $f - g$. Même question pour son noyau.

Exercice 15. Diagonalisation.

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x, 4x - y + 3z, 4x - 2y + 4z).$$

Posons $\mathcal{B} = ((1, -1, -2), (1, 2, 0), (0, 1, 1))$ et notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- 1) Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$.
- 2) Donnez la matrice $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$ puis calculez son inverse.
- 3) En vous aidant des questions précédentes, déterminez la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- 4) Déduisez-en le noyau et l'image de f . Cette application est-elle un automorphisme ?
- 5) Soit n un entier naturel. Démontrez la relation

$$[f^n]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}([f]_{\mathcal{B}})^n P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}.$$

- 6) Déterminez une formule directe pour calculer f^n .

Proposition 1 (inverse d'une matrice 2×2). Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. La matrice M est inversible si et seulement si $\det(M) = ad - bc$ est non nul et on a

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Construction de $\mathbb{C}$.

Considérons l'application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour tout complexe $a + ib$ par

$$\varphi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrez que φ est une application $\mathbb{R}$ -linéaire.
- 2) Donnez la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}$ ainsi la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Explicitiez ensuite la matrice de φ de la base $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.
- 3) Utilisez cette matrice pour calculer l'image de $7 - 3i$ sous l'application φ .
- 4) Déterminez le noyau et l'image de φ en utilisant la représentation matricielle. L'application est-elle injective, surjective, bijective ?
- 5) Montrez que φ est un morphisme d'algèbres. Autrement dit, il reste à montrer que pour tous complexes z et z' , on a $\varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$.
- 6) Considérons le complexe $z = a + ib$.
 - 6.1) Déterminez sous quelle condition la matrice $\varphi(a + ib)$ est inversible.
 - 6.2) Calculez son inverse. Vous pouvez céder à la tentation d'utiliser la formule, mais les vrais le feront avec un pivot de Gauss.
 - 6.3) Comparez le résultat avec l'inverse du complexe $z = a + ib$.